This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

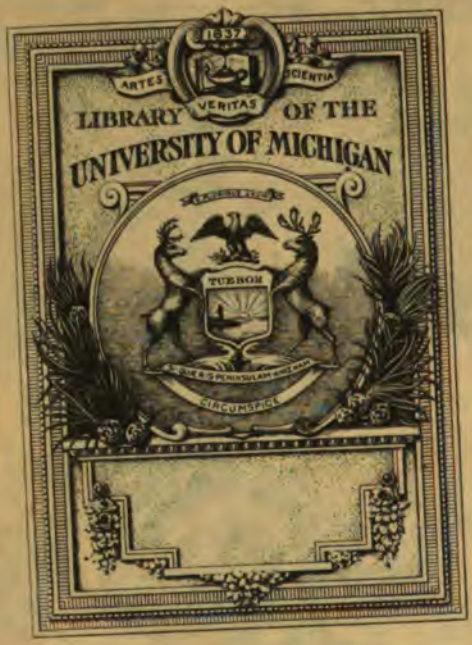
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

NON
CIRCULATING

35
.C211
v.4

COURS
DE
MATHÉMATIQUE.

Troisième Partie.

ÉLÉMENS
DE
MÉCHANIQUE STATIQUE.

Tome Premier.

Charles Etienne Louis Camus
Par M. CAMUS, *de l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Ingénieurs, Professeur & Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale d'Architecture.*

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCLI.

Hist. of Sci.
Vaucois
4-7-24
9984

PRE'FACE.

LA Méchanique Statique, qui eſt le ſujet de la troiſième Partie de l'Ouvrage que M. le Comte d'Argenſon m'a ordonné d'entreprendre pour faciliter l'inſtruction des Ingénieurs, devoit naturellement commencer par l'examen des propriétés des Machines ſimples qui ſont utiles par elles-mêmes, & qui entrent dans la conſtruction des Machines compoſées : & ſi je n'avois eu à faire connoître les centres de gravité que relativement aux propriétés des machines que je me propoſois d'expliquer, j'aurois pû, à l'exemple de preſque tous les Auteurs qui ont traité cette matière, inſérer une théorie ſuccinte de ces centres dans celle du levier. Mais ayant conſidéré que les Ingénieurs n'ont pas ſeulement beſoin de connoître les centres de gravité par rapport aux machines, & qu'ils ont encore occaſion d'en faire des applications à la pratique de la Géométrie, j'ai jugé néceſſaire de les traiter dans une plus grande étendue que ne l'ont fait les Auteurs dont la lecture eſt à la portée des commençans : & comme la doctrine des centres de gravité n'a dans le fond pour objet que la compoſition & décompoſition des

forces parallèles, j'y ai ajoûté ce qu'il étoit néceſſaire de faire connoître ſur la compoſition & décompoſition des forces dont les directions ne ſont pas parallèles; en ſorte que les deux Livres contenus dans ce Volume, & dont je vais rendre compte, forment un Traité de la compoſition des forces & de leur décompoſition.

Ce Traité commence par les Notions préliminaires qu'on doit avoir de l'objet général de la Méchanique Statique, de la manière de repréſenter les forces, des demandes par rapport aux directions des puiſſances & aux points dont on peut ſuppoſer que ces directions partent, & des axiomes ſur leſquels la théorie de l'équilibre des machines eſt appuyée.

Le premier Livre qui ne regarde que les centres de gravité & leur uſage dans la Géométrie pratique, eſt partagé en onze Chapitres.

Dans le premier Chapitre, j'expoſe les principes généraux ſur les centres de gravité, ce qu'on entend par peſanteur, la manière dont on ſuppoſe qu'elle agit, & la ſituation que prennent les corps peſans.

Dans le ſecond Chapitre, je cherche les centres de gravité des figures ſymmétriques & de celles dont les parties peuvent être conſidérées comme des figures ſymmétriques.

Le troiſième Chapitre peut être regardé

comme le fondement de la compoſition & décompoſition des forces parallèles. J'y enſeigne à trouver les centres de gravité des ſyſtèmes compoſés de pluſieurs corps dont on connoît les poids & les centres de gravité particuliers.

Dans le quatrième Chapitre, qui n'eſt qu'une ſuite du précédent, j'enſeigne à trouver les momens des corps & de leurs parties, & à déterminer leurs centres de gravité par le moyen de ces momens.

Le Chapitre cinquième eſt une application du précédent à la recherche des momens & des centres de gravité des arcs & des ſurfaces de différentes portions de cercle, de ceux de toutes les parties de la ſurface & de la ſolidité de la ſphère.

Le ſixième Chapitre eſt encore une application du quatrième à la recherche des centres de gravité des aires des ſegmens & ſecteurs elliptiques. J'y conſidère non ſeulement les ſegmens & ſecteurs droits qui ſont coupés en deux parties ſemblables & égales par l'un ou l'autre axe de l'ellipſe, mais encore les ſegmens & ſecteurs obliques qui ne peuvent être coupés qu'en deux parties égales & non ſemblables par des diamètres de l'ellipſe; & j'y détermine les ſurfaces & les centres de gravité de tous ces ſegmens & ſecteurs, en les comparant avec

des ſegmens & ſecteurs correſpondans du cercle, dont on a trouvé les centres de gravité dans le Chapitre précédent.

Dans le ſeptième, je continue d'appliquer la théorie du quatrième à la recherche des centres de gravité & des ſolidités des ſegmens & ſecteurs droits ou obliques de ſphéroïdes elliptiques, en les comparant avec des ſegmens & ſecteurs correſpondans de ſphère dont les centres de gravité ont été trouvés dans le Chapitre cinquième.

Le Chapitre huitième eſt employé à déterminer les centres de gravité des ſegmens droits & obliques de la parabole & du ſphéroïde parabolique.

Le neuvième Chapitre eſt une théorie des mouvemens des centres de gravité, & n'eſt qu'une préparation aux deux derniers Chapitres, dans leſquels je parle des ſuperficies & des ſolides qui doivent leur génération à des mouvemens de lignes & de plans.

Dans le dixième, je fais voir que les mouvemens des lignes & des ſuperficies ne ſont pas tous propres à produire des ſurfaces & des ſolides : & après avoir déterminé les mouvemens auxquels on doit rapporter les quantités des étendues engendrées, j'en fais l'application à des exemples pour le parallélogramme, le triangle, le parallélépipède, la pyramide, le

cone, les cones tronqués, & pour les superficies & les solidités de quelques corps engendrés par des portions de cercles.

Enfin dans le onzième Chapitre, je continue de faire usage des centres de gravité pour découvrir des méthodes propres au toisé des surfaces des dômes & des voûtes en arc de cloître formés par des mouvemens de moitiés d'anses de panier; j'y donne aussi des méthodes pour toiser les surfaces des mêmes voûtes, en supposant qu'elles sont engendrées par des mouvemens de demi-ellipses.

Mais comme ces méthodes sont très-composées & difficiles à suivre dans la pratique, je ne les regarde que comme des moyens pour examiner si les règles reçûes ou qui peuvent être imaginées par les Praticiens, font trouver la surface de ces voûtes avec toute la justesse qu'on peut raisonnablement demander; & je tire de la seconde de ces méthodes une règle aussi simple & aussi juste qu'on peut la desirer pour toiser les superficies des dômes & des voûtes en arc de cloître surbaissés & surmontés, lorsque leur montée n'est pas moindre que le quart de leur diamètre, ni plus grande que leur diamètre.

Les voûtes d'arrête pouvant être considérées comme des berceaux dont on a retranché différens pans de voûte en arc de cloître, je

déduis du toisé de ces dernières voûtes des règles pour toiser les surfaces des voûtes d'arrête ; & je termine ce dernier Chapitre du premier Livre en indiquant quelques moyens pour trouver les solidités des voûtes en berceau, des voûtes en dôme & en arc de cloître, & des voûtes d'arrête en plein cintre ou surbaissées ou surmontées.

Le second Livre est partagé en deux Chapitres. Dans le premier, je parle de la composition & décomposition des forces dont les directions sont dans un même plan ou peuvent être réduites à un même plan ; & dans le second, j'indique différens moyens pour réduire à deux forces seulement tant d'autres forces qu'on voudra, dont les directions sont dans différens plans & ne peuvent pas être réduites à un même plan.

Le second Volume de cette troisième Partie, qui est actuellement sous presse, contiendra les Traités particuliers des sept machines, & les moyens de construire celles qui demandent le plus de perfection.

ELEMENS
DE
MECHANIQUE STATIQUE.

NOTIONS PRELIMINAIRES.

De l'objet de la Méchanique Statique.

LA Méchanique en général eſt la Science du Mouvement & des Machines.

On appelle *Machine* tout inſtrument qui peut aider à mouvoir un corps, ou à le ſoûtenir en repos malgré l'effort que fait ſa peſanteur pour le mouvoir.

Comme les Machines peuvent être en mouvement ou en repos, la Science qui les conſidère ſe diviſe en deux parties; la partie qui a pour objet les Machines en mouvement s'appelle ſimplement *Méchanique;* & celle qui traite des machines en repos ſe nomme *Méchanique Statique,* ou ſimplement *Statique:* c'eſt cette ſeconde partie de la Méchanique qui fera le ſujet de cet Ouvrage.

On diſtingue deux ſortes de Machines, les Machines ſimples & les Machines compoſées.

Les *Machines ſimples* ſont d'une ſeule pièce ou n'ont qu'une pièce mobile; on en compte ordinairement ſix, le *Levier,* la *Poulie,* le *Tour,* le *Plan incliné,* la *Vis* & le *Coin,* auxquelles on peut ajoûter la *Machine funiculaire*

qu'on examinera la première, parce qu'on en fera uſage dans preſque toutes les autres. On définira ces Machines dans les Traités particuliers qu'on en donnera.

Les *Machines compoſées* ſont celles qui ſont faites de pluſieurs Machines ſimples, ou de la même Machine ſimple répétée. Ces Machines ſont en ſi grand nombre qu'il n'eſt pas poſſible d'en faire l'énumération, & encore moins de les traiter toutes.

Une Machine ſimple ou compoſée ne peut mouvoir un Corps ou le ſoûtenir, qu'avec l'aide d'un Agent que l'on nomme Puiſſance.

On appelle *Puiſſance* tout ce qui peut mouvoir un Corps ou ſoûtenir l'effort de ſa peſanteur, ſoit qu'on ſe ſerve de Machines ou qu'on ne s'en ſerve point.

On appelle *Force abſolue* la Force qu'une Puiſſance exerce pour mouvoir un Corps ou une Machine; ainſi l'on peut prendre la Force abſolue pour la Puiſſance ou pour l'Agent, lorſque cette Force eſt toute celle que l'Agent peut exercer.

Quoiqu'il y ait preſque toûjours une grande différence entre la Puiſſance ou la Force dont l'Agent eſt capable, & la Force abſolue que l'Agent exerce véritablement, on ne diſtinguera point la Force abſolue de la Puiſſance; c'eſt-à-dire qu'on ne conſidérera l'Agent que par rapport à la Force abſolue qu'il exercera ſur un Corps ou ſur une Machine, ſans s'embarraſſer s'il eſt capable d'appliquer une Force plus grande que celle qu'il emploie véritablement.

On nomme *Force relative* à un Corps ou à une Machine, celle que le point du Corps ou de la Machine, tiré ou pouſſé par la Puiſſance, reçoit dans le ſens qu'il peut être mû.

Comme les Forces abſolues ne ſont pas toûjours appliquées aux Corps ou aux Machines dans le ſens qu'on peut les mouvoir, ces forces que l'Agent exerce, ſont ſouvent très-différentes des Forces relatives qui réſultent à ces Corps ou à ces Machines.

La ligne droite ſuivant laquelle une Puiſſance tire ou pouſſe un Corps ou une Machine, ſe nomme la *Direction* de cette Puiſſance ou de la force abſolue qu'elle exerce.

Lorſque pluſieurs Forces appliquées à un Corps ou à une Machine, ſe contre-balancent de manière qu'aucune d'elles ne l'emporte ſur les autres, & que le Corps ou la Machine reſte immobile, on dit que ce Corps ou cette Machine eſt en *Equilibre*. On dit auſſi que les Puiſſances qui ſe contre-balancent, ſont en *Equilibre*.

Quoique la Méchanique Statique ne conſidère point le Mouvement dans les Machines, on reconnoîtra qu'elle eſt extrêmement utile, ſi l'on fait attention que

1.° Il y a des Machines dans leſquelles on conſidère principalement l'équilibre : telles ſont toutes les eſpèces de balances qui ſont en uſage pour peſer des marchandiſes.

2.° Il y a des Machines qui ſont deſtinées à empêcher le Mouvement : tels ſont les cerceaux dont on relie les vaſes qui renferment des liqueurs, & pluſieurs autres Machines dont l'énumération ſeroit ſuperflue.

3.° Entre les Machines qui ſervent à faciliter le Mouvement, il y en a qui ne doivent procurer qu'un Mouvement lent, dont il n'eſt pas néceſſaire de connoître la vîteſſe : & ces eſpèces de Machines n'ont pas

beſoin d'autre conſidération que de celle qu'on peut faire ſur leur équilibre. Car lorſqu'on aura trouvé quelle Puiſſance il faut appliquer à une Machine pour ſoûtenir un Poids en équilibre; ſi la Machine eſt exempte de frottement, & des autres inconvéniens qui s'oppoſent au Mouvement, on ſurmontera ce Poids, pour peu qu'on augmente la Puiſſance qui faiſoit équilibre avec lui: au contraire ſi la Machine eſt ſujette au frottement & à d'autres inconvéniens qui peuvent altérer le mouvement, la réſiſtance que chaque empêchement cauſera, pourra être évaluée à un certain Poids de même eſpèce que celui qu'on voudra ſurmonter, & l'on trouvera pour chacun de ces Poids une Puiſſance propre à faire équilibre avec lui ſur la Machine. Ainſi pour mouvoir la Machine & élever par ſon moyen un Poids propoſé, il ſuffira d'employer une Puiſſance un peu plus grande que la ſomme de celles qui ſont néceſſaires pour ſoûtenir le Poids principal, & les autres Poids auxquels on aura évalué les réſiſtances qui s'oppoſent au Mouvement.

4.° Si par le moyen d'une Machine on veut procurer à un Corps une vîteſſe déterminée, la Statique ne ſera point encore inutile; car quoiqu'elle ne puiſſe pas faire trouver la grandeur de la Puiſſance capable de donner cette vîteſſe par le moyen d'une Machine, elle aidera la Méchanique à trouver cette Puiſſance, en faiſant voir comment elle agira par le moyen de la Machine ſur le Corps qu'il faudra mouvoir. Ainſi quoique la Statique ne conſidère point le Mouvement dans les Machines, elle eſt néceſſaire à la Méchanique pour déterminer ce Mouvement.

De la manière de repréſenter les Forces.

PLUSIEURS Auteurs fondés ſur cet Axiome de Phyſique, *les effets ſont proportionnels à leurs cauſes*, & conſidérant les chemins parcourus en temps égaux par un même Corps ou par des Corps égaux, comme les effets des Forces appliquées à ces Corps, ont cru devoir eſtimer les Puiſſances appliquées à un Corps, par les chemins que ces Puiſſances ſéparément priſes pourroient faire parcourir à ce Corps dans des temps égaux. Mais la Méchanique Statique étant une Science purement mathématique qui n'a pour objet que le repos des Corps ou l'équilibre des Puiſſances qui leur ſont appliquées, eſt abſolument indépendante du mouvement. Ainſi ſans avoir recours à des principes de Phyſique qui lui ſont d'autant plus étrangers qu'ils ſuppoſent le mouvement, nous nous contenterons de repréſenter les Forces par des lignes droites proportionnelles à ces Forces.

Pour repréſenter une Puiſſance, on doit avoir égard à deux choſes, à la quantité de force abſolue qu'elle exerce, & à la direction ſuivant laquelle elle agit.

Comme la Peſanteur eſt une Force, & que les Poids ſont des Meſures connues de peſanteur, on peut eſtimer par des Poids la quantité de Force qu'une Puiſſance exerce. On peut dire, par exemple, qu'une Puiſſance eſt d'une livre ou de deux livres ou de trois livres &c. lorſqu'elle pouſſe ou tire avec la même Force qu'un Poids d'une livre ou de deux livres ou de trois livres &c.

Quoique l'eſtimation des quantités de Force que les Puiſſances exercent puiſſe ſe faire très-naturellement par des Poids capables de tirer ou de pouſſer

comme ces Puiſſances, & qu'on ne puiſſe pas les eſtimer autrement dans les Calculs, on ne ſe ſert point de Poids dans l'examen géométrique des Machines. Car dans cet examen tout devant être repréſenté par des Figures, & les Figures ne pouvant être compoſées que de Lignes, on eſt obligé de repréſenter les Puiſſances par des Lignes.

Pour que des Lignes repréſentent des Puiſſances, il faut qu'on y diſtingue deux choſes en même temps; les Directions de ces Puiſſances, & leurs grandeurs ou les quantités de Force qu'elles exercent. Or des Lignes repréſenteront tout à la fois les directions des Puiſſances & leurs grandeurs, lorſqu'elles ſeront priſes ſur les directions mêmes de ces Puiſſances, & qu'elles auront des longueurs proportionnelles à ces Puiſſances.

Fig. 1. Par exemple, ſi deux Puiſſances P, Q appliquées à deux cordons AP, AQ tirent un Corps ou une Machine par un point A, & ſont l'une de deux livres, l'autre de trois livres; on prendra ſur les directions AP, AQ de leurs cordons deux parties AB, AC qui ſoient entr'elles comme 2 eſt à 3 : c'eſt-à-dire que pour repréſenter la Puiſſance P de deux livres, on prendra ſur ſa direction deux parties égales quelconques AD, DB; & que pour repréſenter la Puiſſance Q de trois livres, on prendra ſur ſa direction trois parties égales AE, EF, FC de même grandeur que les précédentes AD, DB. Alors les deux lignes AB, AC repréſenteront en même temps les directions & les grandeurs des deux Puiſſances P, Q.

Il eſt évident que ſi l'on a plus de deux Puiſſances appliquées à une Machine ou à un Corps, il faudra repréſenter de la même manière chacune d'elles par une partie de ſa direction, & faire en ſorte que les

parties qu'on prendra ſur les directions de toutes ces Puiſſances ſoient proportionnelles aux quantités de Force qu'elles exerceront.

Des principes de la Méchanique Statique.

LES Principes de la Méchanique Statique ſont des Propoſitions ſimples ſur leſquelles la théorie de cette Science eſt appuyée; il y en a de trois eſpèces, les Définitions, les Demandes & les Axiomes. Comme les Définitions ſont répandues dans le corps de ce Traité, & placées aux endroits où elles ſont néceſſaires, on n'expoſera ici que les Demandes & les Axiomes.

DEMANDES.

I.

Lorſqu'une Puiſſance P *tire ou pouſſe un Corps* MN *ou une Machine par un point* C *ſuivant une direction quelconque* CE; *on demande qu'il ſoit permis de conſidérer cette Puiſſance comme ſi elle étoit appliquée au Corps ou à la Machine en tout autre point* D *ou* E *de la même direction; qu'il ſoit même permis de la ſuppoſer appliquée à un point* A *ſitué au dehors du Corps ou de la Machine, & de conſidérer ce point* A *comme s'il étoit inébranlablement attaché au Corps ou à la Machine par une verge roide* AC *ſans maſſe ni peſanteur, de manière que l'action de la Puiſſance* P *ſuppoſée appliquée à ce point, ſe communique toute entière au Corps* MN *ou à la Machine.* Fig. 2 & 3.

Il n'y a rien dans cette Demande qu'on puiſſe refuſer d'accorder, puiſque la Puiſſance *P* tirera toûjours le Corps *MN* ou la Machine ſuivant la même direction & avec la même force; & qu'on ne peut

conſidérer dans une Puiſſance que ſa quantité de force & ſa direction.

Fig. 4, 5, 6, 7 & 8. *Donc ſi les directions de deux Puiſſances* P, Q *appliquées à un même Corps* MN *ſont dans un même plan, & ſe rencontrent ou concourent en un même point* A, *on pourra ſuppoſer que chacune de ces deux Puiſſances eſt appliquée au point* A *commun à leurs directions.*

Car ſi l'on imagine le Point *A* lié avec le Corps *MN*, de manière que l'action de chaque Puiſſance ſur ce point ſe communique au Corps *MN*, les Puiſſances *P*, *Q* tireront ou pouſſeront ce Corps par le point *A*, comme elles le tirent ou le pouſſent par les points *C*, *D* où elles ſont appliquées.

II.

Qu'il ſoit permis de conſidérer les Corps & les Machines, comme s'ils n'avoient point de peſanteur, ſauf à regarder la peſanteur de ces Corps ou de ces Machines, comme des Forces qui leur ſont appliquées.

III.

Qu'il ſoit permis de conſidérer les cordes comme parfaitement flexibles, de regarder les ſurfaces ſur leſquelles des Corps ſeront appuyés comme parfaitement dures & incapables de changer de figure, & de ſuppoſer inflexibles toutes les parties des Machines.

AXIOMES.

I.

Un même Point ne peut pas aller par pluſieurs chemins à la fois.

Ainſi quel que ſoit le nombre des Puiſſances qui agiront

agiront à la fois ſur un même Point ſuivant des directions quelconques, ou ce Point ne ſe remuera point; ou il n'ira que par un ſeul chemin, comme s'il n'étoit pouſſé ou tiré que par une ſeule Force équivalente à toutes les Puiſſances qui concourent à le mouvoir; d'où il ſuit qu'une ſeule Force appliquée à un Point, peut le mouvoir ou faire effort pour le mouvoir, de la même façon que pluſieurs autres Forces qui lui ſeroient appliquées en même temps.

I I.

Deux Forces égales & directement oppoſées appliquées à la fois à un même Corps ſe détruiſent mutuellement; & réciproquement lorſque deux Forces ſe détruiſent mutuellement, elles ſont égales & directement oppoſées.

Donc un Corps eſt en équilibre, lorſqu'il eſt tiré ou pouſſé par deux Forces égales & directement oppoſées; car les deux Forces égales appliquées à ce Corps ſe détruiſant mutuellement, il doit reſter immobile.

Et réciproquement lorſqu'un Corps tiré ou pouſſé par deux Forces ſeulement, reſte immobile ſans trouver d'autre obſtacle à ſon mouvement que la contrariété des deux Forces qui lui ſont appliquées, ces deux Forces ſont égales & directement oppoſées; car ſans cela les deux Forces ne détruiroient pas mutuellement leurs effets, & le Corps ne reſteroit point immobile.

Puiſque *(Ax. I.)* une ſeule Force peut produire le même effet que pluſieurs autres Forces appliquées à la fois à un même Point; il eſt évident qu'un nombre quelconque de Forces appliquées en même temps à un Point, ſeront en équilibre, & laiſſeront ce Point

en repos, lorſqu'une d'elles ſera égale & directement oppoſée à la Force qui feroit le même effet que toutes les autres.

Et réciproquement lorſqu'un Point pouſſé ou tiré par un nombre quelconque de Forces reſte immobile, c'eſt une marque que chacune de ces Forces eſt égale & directement oppoſée à celle qui feroit le même effet que toutes les autres; car ſans cela quelqu'une de ces Forces l'emporteroit ſur les autres, & le Point ne reſteroit pas immobile.

III.

Un obſtacle invincible qu'on oppoſera à un Corps dans la direction ſuivant laquelle une Puiſſance tendra à mouvoir le Point auquel elle ſera appliquée, arrêtera néceſſairement ce Corps, & le mettra par conſéquent en équilibre; car cet obſtacle fermera au Point ſur lequel la Puiſſance agira, le ſeul chemin que cette Puiſſance pourroit lui faire ſuivre.

Il eſt évident qu'au lieu d'oppoſer au mouvement du Corps un obſtacle invincible qui peut réſiſter à toutes ſortes de Puiſſances quelque grandes qu'elles ſoient, il ſuffit pour l'équilibre d'oppoſer au mouvement de ce Corps, un obſtacle capable d'une réſiſtance égale à la Puiſſance qui tend à le mouvoir.

Et réciproquement, lorſqu'un Corps preſſé de ſe mouvoir par une Puiſſance qui lui eſt appliquée, ſe trouve arrêté par un obſtacle, & demeure par conſéquent en équilibre, cet obſtacle eſt placé dans la direction de la Puiſſance qui tend à mouvoir ce Corps.

Puiſque *(Ax. I.)* une ſeule Force peut mouvoir un Corps, de la même manière que pluſieurs autres

Forces qui lui ſeroient appliquées à la fois; un obſtacle invincible ou d'une réſiſtance égale à la Force qui feroit le même effet que toutes les Forces appliquées à un Corps, étant oppoſé à ce Corps dans la direction ſuivant laquelle toutes les Puiſſances appliquées à la fois s'accordent pour le mouvoir, arrêtera ce Corps & le mettra par conſéquent en équilibre.

Il ſuit de là que pour mettre en équilibre tant de Puiſſances qu'on voudra qui agiſſent toutes à la fois ſur un même Corps ſuivant des directions quelconques, il n'y a qu'à trouver ſuivant quelle ligne toutes ces Puiſſances s'accordent à pouſſer ou tirer le Corps, & oppoſer à ce Corps un obſtacle invincible dans la direction de cette ligne. Et ſi l'on ne doit oppoſer au mouvement de ce Corps qu'un obſtacle d'une réſiſtance égale à la Force qu'il doit arrêter, il faudra trouver encore la quantité de la Force à laquelle toutes les Puiſſances ſe réduiſent pour tirer ou pouſſer le Corps ſuivant la direction qu'elles s'accordent à lui donner. On verra dans le Livre ſecond comment on peut trouver une telle Force.

Et réciproquement, lorſqu'un Corps preſſé de ſe mouvoir par pluſieurs Puiſſances appliquées à la fois, ſe trouve arrêté par quelque obſtacle, ou demeure en équilibre, cet obſtacle eſt placé dans la direction de la Force qui feroit le même effet que toutes les Puiſſances appliquées à la fois.

I V.

Lorſque pluſieurs Forces appliquées à un même Corps, ont la même direction, c'eſt-à-dire, que chacune d'elles tend à mouvoir un même point de ce Corps d'un même côté, on peut les regarder comme une ſeule Force égale

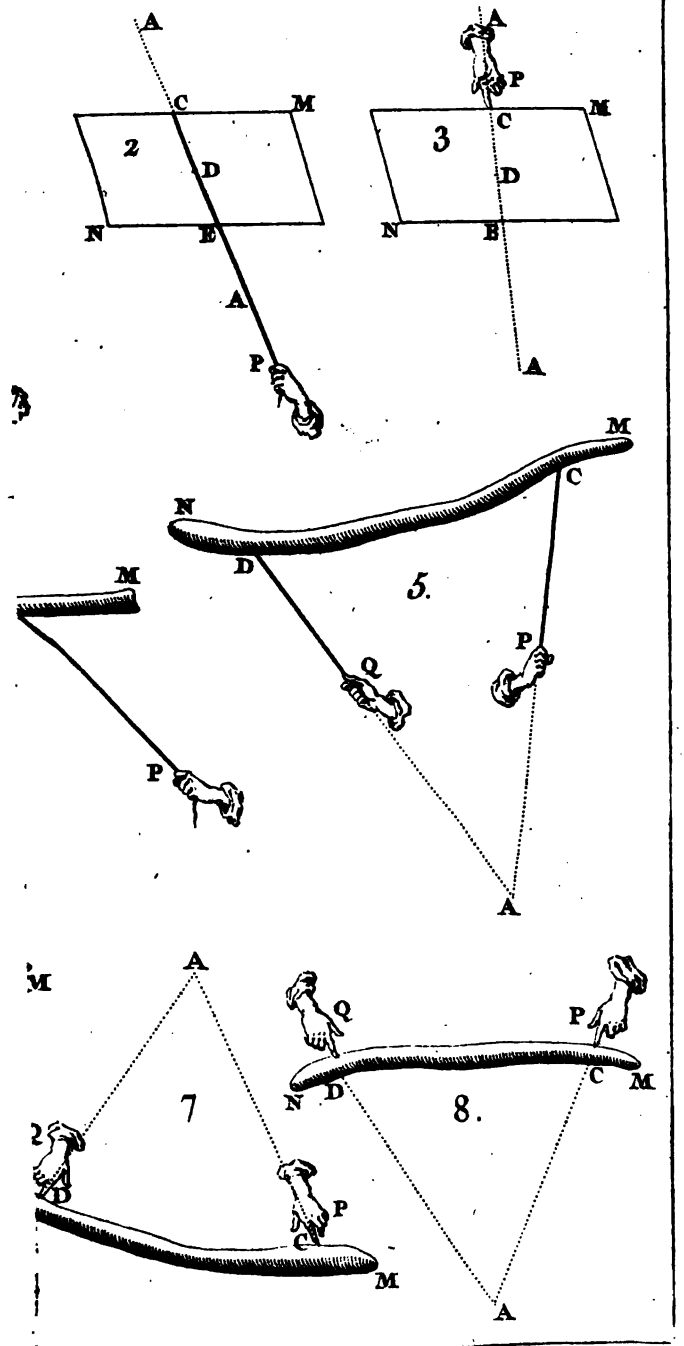
à leur ſomme, & de même direction que ces Puiſſances.

Et réciproquement une Puiſſance appliquée à un Corps pourra être regardée comme l'aſſemblage de tant de Forces qu'on voudra, dont la ſomme ſera égale à cette Puiſſance, & qui auront toutes la même direction qu'elle.

V.

Lorſque deux Puiſſances appliquées à un même Corps ſont inégales & directement oppoſées, il en réſulte à ce Corps une Force égale à leur différence, & qui a la même direction que la plus grande de ces Puiſſances.

Ce cinquième Axiome peut être regardé comme une conſéquence des deux précédens; car la plus grande des deux Puiſſances oppoſées peut être conſidérée comme la ſomme de deux Forces de même direction, dont l'une eſt égale à la Puiſſance oppoſée qu'elle détruira, & par laquelle elle ſera réciproquement détruite: ainſi il ne reſtera qu'une Force égale à l'excès de la plus grande Puiſſance ſur la plus petite, & de même direction que la plus grande dont elle fait partie.


A
C
M
2
D
N
E
A
P
A
P
C
M
3
D
N
E
A
M
C
N
D
5.
M
Q
P
P
A
M
A
Q
P
7
8.
N
D
C
M
P
C
M
A

ELEMENS
DE
MECHANIQUE STATIQUE.

LIVRE PREMIER.
Des Centres de Gravité.

CHAPITRE PREMIER,
Principes généraux ſur les Centres de gravité.

DÉFINITIONS.

I.

1. ON appelle *Gravité*, ou *Peſanteur*, la force qui tend à faire deſcendre les corps vers le centre de la Terre, & qui les meut effectivement ainſi, quand aucun obſtacle ne s'y oppoſe.

2. Dans la théorie des centres de gravité, on ſuppoſe que la Peſanteur eſt une force conſtante, qui agit par-tout également, même à différentes diſtances du centre de la Terre : on ſuppoſe auſſi que les directions de l'action de la peſanteur ſur toutes les parties d'un même corps, & ſur les corps qui compoſent un même ſyſtème, ſont parallèles.

On a cependant observé que la pesanteur n'agit pas par-tout également; & qu'elle est différente, non seulement à différentes distances du centre de la Terre, mais encore à la même distance de ce centre.

On sait par l'Astronomie physique, qu'un même corps ne pèse pas également à différentes distances du centre de la Terre: & comme toutes les parties d'un même corps ne peuvent pas être également éloignées de ce centre, toutes les parties égales d'un même corps, quoique homogènes, ne peuvent pas peser également dans la rigueur géométrique. Mais les différences de l'action de la pesanteur, à différentes distances du centre de la Terre, ne peuvent être sensibles que quand ces distances sont extrêmement différentes: & comme les corps dont on considèrera les centres de gravité, & qui composeront un même système, ne seront jamais assez éloignés les uns des autres, pour être exposés à des actions de la pesanteur sensiblement inégales, on peut supposer sans inconvénient, dans la doctrine des centres de gravité, que la pesanteur agit également à différentes distances du centre de la Terre.

On a observé aussi que les vibrations d'un même Pendule, sont plus lentes à l'Equateur qu'à l'isle de Cayenne, plus lentes à Cayenne qu'à Paris, & encore plus lentes à Paris qu'au Cercle Polaire; en sorte que l'action de la pesanteur sur la surface de la Terre, croît à mesure qu'on s'éloigne de l'Equateur, ou qu'on s'approche du Pole: & cela principalement à cause que la rotation de la Terre sur son axe, procure aux corps pesans d'autant plus de force centrifuge qu'ils sont plus voisins de l'Equateur, ou qu'ils décrivent de plus grands cercles; & qu'une plus grande force centrifuge détruit une plus grande partie de la pesanteur propre d'un corps. Mais ce qui reste de pesanteur aux corps n'est sensiblement

différent, qu'à des éloignemens de l'Equateur qui diffèrent de pluſieurs degrés ; & un ſyſtème de corps dont on conſidère le centre de gravité, occupe toûjours un eſpace incomparablement plus petit qu'un degré. On peut donc ſuppoſer dans la théorie des centres de gravité, que la peſanteur de toutes les parties d'un même corps, ou des corps homogènes qui compoſent un même ſyſtème, eſt égale, lorſque ces parties ſont égales, ou que ces corps ſont égaux.

Puiſque (n.° 1) *la peſanteur eſt une force qui tend à faire deſcendre les corps vers le centre de la Terre, il ſemble que l'on ne peut plus ſuppoſer que les directions de l'action de la peſanteur ſur toutes les parties d'un même corps, ou ſur les corps d'un même ſyſtème, ſont parallèles. Mais l'étendue d'un corps, ou d'un ſyſtème compoſé de pluſieurs corps, ſera toûjours ſi petite par rapport à la diſtance de ce corps au centre de la Terre, que les angles que feront enſemble les directions de la peſanteur, ne ſeront jamais ſenſibles : car un angle d'une ſeconde ne peut être aperçû que très-difficilement avec les meilleurs inſtrumens ; & il faut une ligne de 16 toiſes ſur la ſurface de la Terre, pour ſoûtenir un angle d'une ſeconde, qui auroit ſon ſommet au centre de la Terre. On peut donc, ſans craindre aucune erreur ſenſible, ſuppoſer dans la doctrine des centres de gravité, que les directions de l'action de la peſanteur ſur les parties d'un même corps, ou ſur les corps d'un même ſyſtème, ſont parallèles.*

COROLLAIRE.

3. La Peſanteur étant une force conſtante, qui agit également ſur toutes les parties égales d'un même corps, & toutes les directions de ſon action étant parallèles, il eſt clair que la peſanteur d'un corps eſt égale à la

ſomme des peſanteurs de toutes ſes parties. Ainſi l'on ne changera rien à la peſanteur d'un corps, en changeant ſa figure ou ſa ſituation.

Fig. 1. Lorſqu'un corps *K* ſera ſuſpendu par un cordon *AB* attaché à ce corps en *B*, ce corps agira avec toute la force de ſa peſanteur ſur le crochet ou point de ſuſpenſion *A*, par le moyen du cordon *AB*: & comme il agiroit de même avec toute ſa peſanteur ſur le même crochet *A*, ſi on l'attachoit à tout autre point, tel que *D* du cordon, il eſt évident qu'un corps qui pend librement au bout d'un cordon *AB*, agira toûjours également ſur le point de ſuſpenſion *A*, quelle que ſoit la longueur du cordon. On pourra donc, quand on le voudra, ſuppoſer nulle la longueur du cordon, & regarder le corps comme s'il peſoit immédiatement ſur le point *A* du crochet. Enfin l'on pourra ſuppoſer que le cordon pend d'un point quelconque *E*, ou que la peſanteur du corps eſt appliquée à un point *E*, placé au deſſus du crochet, en imaginant que ce point *E* eſt lié avec le crochet par le moyen d'une verge inflexible *AE*, par laquelle le corps pouſſera le crochet de haut en bas, avec toute la force de ſa peſanteur.

II.

4. On appelle *Poids* une certaine meſure de peſanteur, comme une livre, deux livres, trois livres, &c. On donne auſſi communément le nom de *poids* à un corps peſant quelconque.

5. Quoiqu'il n'y ait dans la Nature que les corps qui ſoient peſans, & que les ſuperficies, les lignes & les points ne ſoient point des corps, on regarde dans la Méchanique les ſuperficies, les lignes & les points, comme des êtres peſans; ou pluſtôt on conſidère ce

qui arriveroit, ſi tous les points des ſuperficies & des lignes étoient peſans; & l'on cherche en conſéquence les centres de gravité de ces deux eſpèces d'étendues.

III.

6. La Ligne ſuivant laquelle agit la peſanteur, ſe nomme *Ligne verticale;* on la nomme auſſi *Ligne à plomb,* parce que ſi l'on ſuſpend un plomb, ou tout autre corps peſant par le moyen d'un fil, ce fil ſe placera dans la direction de l'action de la peſanteur, & repréſentera par conſéquent une ligne verticale.

IV.

7. Le *Centre de gravité* d'un corps eſt un point, par lequel ce corps étant ſoûtenu ou ſuſpendu, reſte immobile dans quelque ſituation qu'il ſoit; comme ſi toute la peſanteur de ce corps étoit réunie à ce point, & pouſſoit ce corps par ce ſeul point.

8. La Ligne verticale ſuivant laquelle la peſanteur d'un corps tend à faire deſcendre le centre de gravité, s'appelle *Direction de la peſanteur de ce corps.*

9. Toute droite qui paſſe par le centre de gravité d'un corps, s'appelle *Axe d'équilibre.* Comme on peut faire paſſer une infinité de lignes droites par un même point, il eſt évident qu'un même corps peut avoir une infinité d'axes d'équilibre différens.

10. Un plan qui paſſe par le centre de gravité d'un corps, ou par un axe quelconque d'équilibre, s'appelle *Plan d'équilibre.* Ainſi, comme on peut faire paſſer une infinité de plans différens par un même point, on peut conſidérer dans un même corps une infinité de plans différens d'équilibre.

11. *Nous verrons dans la ſuite que ſi la peſanteur eſt une force conſtante, & qu'elle agiſſe parallèlement ſur toutes les parties d'un même corps, comme nous le ſuppoſons, toute étendue conſidérée comme peſante, aura un centre de gravité tel que nous l'avons défini. Mais pour ne point laiſſer prendre de préjugé, il faut avertir que ſi la peſanteur, quoique ſuppoſée conſtante, ne pouvoit pas être ſuppoſée agir parallèlement ſur toutes les parties d'un même corps, aucun corps, excepté la ſphère, n'auroit un centre de gravité tel que nous l'avons défini.*

12. Le centre de gravité d'un corps peut être un des points de ce corps, ou bien être un point placé au dehors de lui. Une Sphère, par exemple, aura pour centre de gravité un de ſes propres points; & une verge courbe telle qu'une portion de cerceau, n'aura pas un de ſes points pour centre de gravité: dans le dernier cas, on imagine que le centre de gravité eſt lié avec le corps, de manière qu'il n'en puiſſe point être ſéparé, & qu'il conſerve toûjours la même ſituation par rapport à toutes les parties de ce corps. On dira la même choſe des axes & des plans d'équilibre, qu'on ſuppoſera ſi ſolidement liés avec le corps, qu'ils ne pourront point changer de ſituation par rapport à lui.

Comme chaque partie d'un même corps peſant eſt elle-même un corps peſant, chaque partie aura auſſi un centre de gravité particulier, dans lequel toute la peſanteur de cette partie ſera cenſée réunie; en ſorte que le centre de gravité du corps entier ſera le centre de gravité de tous les centres de gravité particuliers des parties dans leſquelles on ſuppoſera le corps diviſé.

13. De même que l'on imagine un corps unique divisé en plusieurs parties, dont chacune a son centre de gravité particulier; on imagine aussi que plusieurs corps bien distingués composent ensemble un seul & même corps, qui n'a qu'un centre de gravité, dans lequel la pesanteur de tous les corps particuliers est censée rassemblée.

Un corps ainsi composé de plusieurs autres corps, se nomme *Système de corps;* & son centre de gravité s'appelle *Centre de gravité du système:* enfin la ligne verticale tirée par le centre de gravité du système, & suivant laquelle la pesanteur du système feroit descendre ce centre, s'appelle *Direction de la pesanteur du système.*

14. Un système de corps, ayant un centre de gravité, aura aussi des axes d'équilibre & des plans d'équilibre.

Il pourra nous arriver dans la suite, de nommer simplement corps *un système de plusieurs corps, comme si tous ces corps n'étoient que les parties d'un même corps non divisé; & réciproquement nous pourrons donner le nom de* système de corps *à un seul corps, en regardant les parties de ce corps comme des corps particuliers.*

COROLLAIRE I.

15. Donc si l'on suspend un corps K par un fil AB attaché à un point quelconque B de ce corps, le corps K se placera de manière que le fil AB sera vertical, & que le point fixe A d'où pend le fil, le point B par lequel le fil tient au corps, & le centre de gravité G de ce corps, seront tous trois dans la même direction verticale AZ du fil. Fig. 1.

Car (*n° 7*) le centre de gravité *G* pouvant être regardé comme le ſeul point qui pèſe dans le corps *K*, la peſanteur pouſſera le corps *K* ſuivant la direction verticale *G Z*. Mais puiſque le corps ſuſpendu reſte immobile, malgré ſa peſanteur qui tend à le faire deſcendre, la réſiſtance du fil qui doit détruire l'effet de la peſanteur, ſe fait ſuivant une direction *G A* préciſément oppoſée à celle *G Z* de la peſanteur: ainſi le fil doit agir ſuivant une ligne verticale *G A*; & par conſéquent les trois points *A, B, G*, doivent être avec le fil *A B* dans une même ligne verticale *A Z*.

16. Si au lieu d'un corps unique *K*, on ſuſpend un ſyſtème de corps, il eſt clair que tout ce qu'on a dit du corps unique *K*, conviendra auſſi au ſyſtème de pluſieurs corps; c'eſt-à-dire, que le point *A* d'où pendra le fil, le point *B* par lequel le fil ſoûtiendra le ſyſtème, & le centre de gravité de ce ſyſtème, ſeront tous trois avec le fil *A B* dans une même ligne verticale *A Z*; comme ſi le ſyſtème n'étoit qu'un ſeul corps, & que les corps particuliers du ſyſtème fuſſent les parties de ce corps.

Fig. 2. 17. Il en ſera de même, ſi un corps ou un ſyſtème de corps *K* eſt ſoûtenu par une ligne inflexible *A B*, qu'aucun appui latéral n'empêche de tomber. Le point *A* ſur lequel la ligne inflexible *A B* repoſera, le point *B* par lequel cette ligne ſoûtiendra le corps ou le ſyſtème de pluſieurs corps, & le centre de gravité *G* de ce corps ou de ce ſyſtème, ſeront tous trois dans une même ligne verticale *A Z*. Car la peſanteur du corps ou du ſyſtème *K*, agiſſant ſur ſon centre de gravité *G*, pouſſera ce corps ou ce ſyſtème ſuivant la ligne verticale *G B*. Or la ligne inflexible *A B*, qui

eſt la ſeule choſe employée pour ſoûtenir le corps ou le ſyſtème *K*, doit réſiſter ſuivant une direction *AB* oppoſée à *GB*. Ainſi la direction *GB* de la peſanteur, & celle *AB* de la réſiſtance de l'appui, devant être dans une même ligne verticale, les trois points *A*, *B*, *G*, ſeront dans une même ligne verticale *AZ*.

COROLLAIRE II.

18. Si pluſieurs corps peſans *K*, *L*, *M*, *&c.* ſont enfilés par un cordon ou ligne flexible, qui tienne aux centres de gravité *G*, *H*, *I*, *&c.* de ces corps, & que le cordon ſoit attaché à un point fixe *A*, d'où il pende librement avec tous les corps qu'il ſoûtient; les centres de gravité *G*, *H*, *I*, *&c.* des corps ſuſpendus, & le point fixe *A* d'où pendra le cordon, ſeront tous dans une même ligne verticale; en ſorte que les parties *AG*, *GH*, *HI*, *&c.* du cordon, ſeront dans une même ligne droite verticale *AZ*: & le centre de gravité du ſyſtème de tous ces corps ſera auſſi dans la même verticale *AZ*; ce qu'on démontre comme il ſuit. Fig. 3.

Lorſque le ſyſtème compoſé de tous les corps *K*, *L*, *M*, *&c.* ſera parvenu à demeurer immobile, & que tous ces corps auront pris les places qui leur conviennent, chaque corps pourra être regardé comme un appui fixe d'où pendra le corps inférieur. Alors le corps *M* le plus bas étant ſuſpendu par le cordon *HI*, ſe placera de manière que le centre de gravité *I* de ce corps, & le point fixe *H* qui eſt le centre de gravité du corps *L*, ſeront avec le fil *HI* dans une même ligne verticale *(n.° 15)*.

Le cordon qui ſoûtient le corps *M* étant attaché en *H*, comme à un point fixe d'où il pend, on peut ſuppoſer *(n.° 3)* que toute la peſanteur de ce corps *M* eſt appliquée au point de ſuſpenſion *H*, & qu'elle

eſt raſſemblée en ce point avec celle du corps *L* qui a ſon centre de gravité en ce même point *H*. Donc *(n.° 15)* le point *H* où la peſanteur des deux corps *L, M* eſt raſſemblée, & le point fixe *G* d'où pend le cordon *GH*, & qui eſt le centre de gravité du corps *K*, ſont dans une même ligne verticale avec le cordon *GH*.

De même, puiſque le point fixe *G* ſoûtient, au moyen du cordon *GH*, la peſanteur des deux corps *L, M*, on peut encore ſuppoſer que la peſanteur de ces deux corps eſt réunie avec celle du corps *K* au point d'appui *G*, qui eſt le centre de gravité de ce dernier. Ainſi *(n.° 15)* le point *G*, par lequel le cordon ſoûtient le ſyſtème, & le point de ſuſpenſion *A*, ſont dans une même ligne verticale avec le cordon *AG*.

Donc les centres de gravité *G, H, I, &c.* par leſquels les corps *K, L, M, &c.* ſont attachés au cordon flexible qui pend du point fixe *A*, ſont dans une même ligne verticale avec ce point fixe *A*; & par conſéquent les portions *AG, GH, HI, &c.* de ce cordon, ſont auſſi dans la même ligne verticale *AZ*.

Or les corps *K, L, M, &c.* dont nous venons de faire voir que les centres de gravité *G, H, I, &c.* ſont avec le cordon *AG* dans une même ligne verticale *AZ*, abaiſſée du point de ſuſpenſion *A*, ſont les parties d'un même ſyſtème, qu'on peut regarder comme un corps ſuſpendu par le cordon *AG*. Ainſi le centre de gravité de ce ſyſtème eſt dans la même ligne verticale *AZ*, avec le cordon *AG*.

19. *On peut remarquer qu'il n'eſt pas néceſſaire que le cordon* AI *ſoit attaché aux centres mêmes de gravité des corps* K, L, M, &c. *qu'il ſoûtient, pour que ces*

centres de gravité G, H, I, &c. *ſe rangent dans une même ligne verticale avec le centre de gravité général du ſyſtème; mais qu'il ſuffit que les cordons* A B, C D, E F, &c. *ſoient attachés à des axes d'équilibre* B C, D E, &c. *des corps qui ſont au deſſus du corps* M *le plus bas: cela eſt trop clair pour mériter une démonſtration. Nous verrons dans un des Corollaires ſuivans, que ſi les cordons attachés à un même corps qui ne ſeroit pas le plus bas, n'étoient point attachés à un même axe d'équilibre, c'eſt-à-dire, à deux points d'une ligne droite qui paſſe par le centre de gravité de ce corps, le point de ſuſpenſion* A, *& les centres de gravité des corps ſoûtenus, ne ſeroient pas dans la même ligne verticale* A Z *avec le cordon* A B.

COROLLAIRE III.

20. Dans le Corollaire précédent, la flexibilité du cordon attaché aux centres de gravité *G, H, I, &c.* des corps *K, L, M, &c.* n'a ſervi qu'à permettre à ces corps de prendre un arrangement, tel que leurs centres de gravité particuliers, & celui du ſyſtème général, fuſſent dans une même ligne verticale *A Z*. Mais lorſque tout eſt ainſi arrangé, & que le ſyſtème eſt immobile, rien n'empêche de regarder le cordon comme une ligne droite inflexible, qui paſſe par tous les centres de gravité des corps *K, L, M, &c.* & comme on a démontré *(n.° 18)* que le centre de gravité de tout ce ſyſtème ſera dans la même ligne droite, on peut conclurre que ſi les centres de gravité particuliers de tant de corps qu'on voudra, ſont en ligne droite, le centre de gravité général du ſyſtème de tous ces corps ſera dans la même ligne droite. Fig. 3.

Il ſuit de là que le centre de gravité d'une ligne

droite conſidérée comme peſante, eſt un point de cette ligne droite.

COROLLAIRE IV.

Fig. 4. **21.** Mais pluſieurs corps, par exemple, deux corps *K, L* étant liés enſemble par un cordon *CD*, ſi l'on ſuſpend ce ſyſtème par un cordon *AB*, qui pende librement d'un point fixe *A*, & qui ſoit attaché au corps *K*, par un point *B*, en ſorte que la droite *BC*, qui joint les points d'attache *B, C*, ne paſſe pas par le centre de gravité *G* du corps *K*; les centres de gravité *G, H* des deux corps *K, L*, & le point fixe *A*, ne ſeront pas dans une même ligne verticale; & les deux corps *K, L* ſeront diſpoſés de la manière ſuivante.

Suivant le premier Corollaire, le corps *L* ſuſpendu par le cordon *CD*, ſe placera de manière que ſon centre de gravité *H*, le point *D* par lequel le cordon lui eſt attaché, & le point *C* de ſuſpenſion que l'on peut regarder comme un point fixe, puiſque tout eſt immobile, ſeront tous trois avec le cordon *CD*, dans une même ligne verticale *CDH*.

D'ailleurs tout étant en repos, rien n'empêche que l'on ne regarde les deux corps *K, L*, comme deux parties d'un même corps liées enſemble par une verge roide *CD*, ou *GH*, ſans peſanteur. Alors ſi le point *I* eſt le centre de gravité du ſyſtème, qui ſe trouve ſuſpendu par le cordon *AB*, il eſt prouvé dans le premier Corollaire, que le centre de gravité *I* du ſyſtème des deux corps *K, L*, le point *B* par lequel le cordon *AB* eſt attaché à ce ſyſtème, & le point fixe *A* de ſuſpenſion, ſont avec le cordon *AB* dans une même ligne verticale *AI*.

Mais puiſque les cordons *AB, CD* doivent

néceſſairement être verticaux, il n'eſt pas poſſible que les centres de gravité *G*, *H* des deux corps *K*, *L*, & le point de ſuſpenſion *A*, ſoient dans une même ligne verticale *AB*; à moins que les trois droites *AB*, *BC*, *CH* ne faſſent enſemble une ſeule ligne droite qui paſſe par le point *G*: ce qui eſt impoſſible, puiſque *(hyp.)* *BC* qui devroit être une partie de cette ligne droite, ne paſſe pas par ce point *G*. Donc il eſt impoſſible que les centres de gravité *G*, *H* des deux corps *K*, *L*, & le point de ſuſpenſion *A*, ſoient dans une même ligne verticale, dans le cas où la droite *BC* qui joindra les points d'attaches des cordons, ne ſera pas un axe d'équilibre du corps *K*.

COROLLAIRE V.

22. Si l'on ſuſpend ſucceſſivement un corps peſant par deux points différens au moyen d'un fil, les deux directions du fil, quoiqu'elles ſe réduiſent à la même en effet, ſeront différentes par rapport au corps ſuſpendu ſucceſſivement par deux points différens, & ſe croiſeront au centre de gravité de ce corps; car *(n.° 15)* chaque direction verticale du fil paſſera par le centre de gravité du corps ſuſpendu.

COROLLAIRE VI.

23. Si l'on ſuſpend une droite peſante *MN*, par le moyen de deux fils *AB*, *CD* attachés à deux points différens de cette droite, ces deux fils ſeront dans un même plan vertical avec la droite *MN*. Fig. 5.

La droite *MN* étant peſante, tous ſes points tendent à deſcendre verticalement; en ſorte que cette ligne tend à deſcendre ſuivant un plan vertical. Donc les deux fils *AB*, *CD*, qui pour ſoûtenir cette ligne

doivent réſiſter dans un ſens oppoſé à celui de la peſanteur, agiront auſſi dans un plan vertical, & ſeront par conſéquent tous deux dans un même plan vertical, avec la droite MN qu'ils ſoûtiennent.

Il en ſera de même, ſi au lieu d'une droite peſante on ſuſpend un axe d'équilibre chargé de la gravité, ou du centre de gravité d'un corps ou d'une ſurface quelconque.

COROLLAIRE VII.

Fig. 6. 24. Lorſqu'une droite peſante, ou un axe d'équilibre MN chargé du centre de gravité G de ſon corps, eſt ſuſpendu par le moyen de deux cordons AB, CD ſans peſanteur, attachés à une verge inflexible AC, auſſi ſans peſanteur, & que cette verge eſt ſoûtenue par un cordon EF attaché à un point fixe E; le point fixe E d'où pend le fil, le point F par lequel la verge inflexible AC eſt ſoûtenue, & le centre de gravité G du corps dont MN eſt un axe d'équilibre, ſont tous trois avec le fil EF dans une même verticale $EFGZ$; & les fils AB, CD, EF ſont tous trois dans un même plan vertical.

Le ſyſtème étant immobile, on peut conſidérer l'axe d'équilibre MN, la ligne inflexible AC, & les cordons AB, CD, comme un même corps qui n'a de peſant que le centre de gravité G, & qui eſt ſoûtenu par le cordon EF. Ainſi *(n.os 15 & 16)* le point fixe E d'où pend le fil, le point F par lequel le fil tient au ſyſtème $ABDC$, & le centre de gravité G, ſeront tous trois avec le cordon EF, dans une même ligne verticale $EFGZ$; & ſeront par conſéquent auſſi dans un plan vertical qui paſſera par EZ, & par l'axe d'équilibre MN.

Nous avons vû (*n.° 23*) que les deux fils *AB*, *CD* qui ſoûtiennent l'axe d'équilibre *MN*, ſont dans un même plan avec *MN*; & l'on vient de faire voir que *EF* eſt auſſi dans ce plan. Donc les trois cordons *AB*, *CD*, *EF* ſont dans un même plan vertical.

AVERTISSEMENT.

25. Pour trouver le centre de gravité d'un corps ou d'une figure quelconque, on eſt obligé de conſidérer les centres de gravité de ſes élémens; & l'on cherche enſuite le centre de gravité commun à ceux de ces élémens. Comme on peut ſe repréſenter dans une même figure différentes ſortes d'élémens, il eſt à propos de donner ici une idée des différentes façons dont on conçoit qu'une figure peut être compoſée.

On peut imaginer qu'un ſolide eſt compoſé d'une infinité de lames plates. On ſuppoſe ordinairement ces lames également épaiſſes, afin que le poids de chaque lame ſoit proportionnel à ſon aire: mais rien n'oblige à les ſuppoſer telles; & ſi l'on trouve plus commode de les prendre d'inégale épaiſſeur, on peut le faire ſans ſcrupule, pourvû que l'on faſſe leurs poids proportionnels aux produits de leurs aires & de leurs épaiſſeurs.

On peut encore imaginer qu'un ſolide eſt compoſé d'une infinité de couches ſemblables à la figure extérieure, & ſuppoſer à ces couches des épaiſſeurs égales, pour que leurs poids ſoient proportionnels à leurs aires, ou donner à ces couches des épaiſſeurs inégales, en faiſant leurs poids proportionnels aux produits de leurs aires & de leurs épaiſſeurs.

Enfin l'on peut ſuppoſer qu'un corps eſt compoſé d'une infinité de petites pyramides, dont tous les ſommets ſont réunis à un même point de ce corps, &

dont toutes les baſes forment la ſurface de ce même corps.

La ſphère fournit un exemple de ces trois manières dont on peut conſidérer la compoſition d'un corps. 1.° On peut ſuppoſer que la ſphère eſt compoſée d'une infinité de lames plates circulaires poſées les unes ſur les autres. 2.° On peut ſuppoſer qu'elle eſt compoſée d'une infinité de couches ſphériques. 3.° On peut imaginer qu'elle eſt compoſée d'une infinité de pyramides égales, dont tous les ſommets ſont au centre, & dont les baſes forment ou occupent la ſurface entière ſphérique.

On peut de même conſidérer que le cylindre eſt compoſé d'une infinité de lames circulaires, égales au plan ou à la lame qui lui ſert de baſe. On peut imaginer auſſi qu'il eſt compoſé d'une infinité de couches cylindriques ; mais il ne ſeroit pas également commode de le ſuppoſer compoſé d'une infinité de pyramides.

En conſidérant une ſuperficie, on la regarde comme un corps infiniment mince, qui a par-tout la même épaiſſeur. Si cette ſuperficie eſt un plan, on peut imaginer qu'elle eſt compoſée d'une infinité de verges droites, chacune d'une largeur uniforme, & toutes également épaiſſes, afin que leurs poids ſoient proportionnels à leurs longueurs. On peut imaginer auſſi que le plan, par exemple, un cercle, eſt compoſé d'une infinité de couronnes placées les unes dans les autres; enfin l'on peut ſuppoſer que le même cercle eſt compoſé d'une infinité de triangles, qui ont tous leurs ſommets au centre, & dont les baſes occupent la circonférence.

Si la ſuperficie eſt courbe, telle que la ſuperficie d'une

d'une ſphère, on peut ſuppoſer qu'elle eſt compoſée d'une infinité de zones, dont chacune eſt d'une largeur uniforme; & les largeurs de ces zones peuvent être priſes égales ou inégales, comme on le trouvera plus commode.

La ligne eſt conſidérée comme un corps de groſſeur uniforme, infiniment peu large & infiniment peu épais. On peut imaginer qu'elle eſt compoſée d'une infinité de points égaux, ſi l'on veut que ces points pèſent également; ou qu'elle eſt compoſée d'une infinité de petites parties de différentes longueurs, s'il n'eſt pas néceſſaire de faire uſage de parties également peſantes.

Les lignes conſidérées comme élémens, étant de groſſeur uniforme, ſont, comme nous venons de le dire, partagées en points égaux qui pèſent également. Mais les lignes élémentaires ne ſont pas les ſeules que l'on conſidère : il y en a d'autres qui ſouvent ne ſont pas regardées elles-mêmes comme peſantes, & qui ſont chargées des poids de tous les élémens d'une figure. Les parties égales de ces ſortes de lignes ne ſont pas ordinairement également chargées; ainſi quand on eſt dans le cas de les conſidérer comme peſantes, il faut ſuppoſer les poids de leurs parties, proportionnels aux grandeurs des élémens dont elles ſont chargées.

CHAPITRE II.

Des centres de Gravité des figures ſymmétriques, & de quelques autres figures.

I.re PROPOSITION FONDAMENTALE.

THEOREME.

Fig. 7. 26. *LE centre de gravité du ſyſtème de deux corps* K, L *également peſans, eſt dans le milieu* C *de la droite* A B *qui joint les centres de gravité particuliers de ces deux corps.*

DÉMONSTRATION.

La propoſition ſera démontrée, ſi l'on fait voir qu'en ſuſpendant le ſyſtème par le milieu de la droite *A B*, il demeurera immobile dans toutes les ſituations qu'on lui donnera, c'eſt-à-dire, dans la ſituation horizontale, ou dans une ſituation inclinée quelconque à l'horizon.

Si la droite *A B* eſt horizontale, & ſoûtenue par ſon milieu *C* au moyen d'un fil *C D*, toutes choſes ſeront égales & ſemblables de part & d'autre du fil deſtiné à ſoûtenir le ſyſtème. Ainſi il n'y aura aucune raiſon pour que l'un des deux corps l'emporte ſur l'autre, ou deſcende préférablement à l'autre; & par conſéquent les deux corps *K*, *L*, ſoûtenus par le milieu *C* de la droite horizontale *A B*, reſteront immobiles.

Fig. 8. Si la droite *A B*, ſuſpendue par ſon milieu *C* au moyen du fil *C D*, eſt inclinée à l'horizon de quelque façon que ce ſoit, on imaginera dans ſon plan vertical, & par ſon milieu *C*, une droite horizontale *E C F*, que les directions verticales *E A*, *B F* de la peſanteur

des deux corps K, L, rencontreront en deux points E, F qui ſeront également éloignés du point C, parce que $CA = CB$. Alors concevant la droite ECF ſolidement arrêtée avec la droite AB, on pourra regarder le corps K, comme s'il étoit appliqué par un cordon EA au bout E de la droite EF; & conſidérer le corps L, comme s'il pouſſoit par une verge BF l'autre bout F de la même droite : en ſorte que les deux corps également peſans K, L ſeront cenſés agir de tout leur poids ſur les extrémités d'une droite horizontale EF ſoûtenue par ſon milieu C. Donc ſuivant le premier cas, les deux corps K, L ainſi ſoûtenus doivent demeurer immobiles, quoique réellement appliqués aux extrémités d'une droite AB inclinée à l'horizon d'une façon quelconque.

Donc en général les corps K, L ſeront ſoûtenus immobiles par un point pris au milieu de la droite AB qui joint leurs centres de gravité, dans quelque ſituation que puiſſe être cette droite AB. Ainſi le centre de gravité du ſyſtème de deux corps également peſans, eſt au milieu de la droite qui joint leurs centres de gravité particuliers. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

27. Deux corps égaux K, L ayant leurs centres de gravité A, B aux extrémités d'une droite AB dont le milieu eſt C; ſi à diſtances égales de ce milieu C, on applique encore à la même droite les centres de gravité D, E de deux nouveaux corps égaux M, N, ce milieu C ſera encore le centre de gravité de ces deux nouveaux corps M, N; & comme il étoit déjà le centre de gravité des deux premiers K, L, il ſera le centre de gravité des quatre corps K, L, M, N. Fig. 9.

Si l'on continue d'appliquer les centres de gravité de deux nouveaux corps égaux, à la même droite *AB* & à diſtances égales de ſon milieu *C*, il eſt clair que ce milieu *C* ſera toûjours le centre de gravité de ces nouveaux corps, & celui du ſyſtème de tous les corps appliqués à la droite *AB*.

COROLLAIRE II.

28. Donc toute figure dont les élémens auront leurs centres de gravité dans une même ligne droite, aura ſon centre de gravité dans le milieu de cette ligne droite, ſi ces élémens pris deux à deux à diſtances égales du milieu de cette droite, ſont égaux; puiſque ſuivant ce qui eſt ſuppoſé, ces élémens pris deux à deux ſont de petits corps égaux ou également peſans, que l'on peut regarder comme les corps *K, L, M, N,* dont on a parlé dans le Corollaire précédent.

THEOREME.

Fig. 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 & 19.

29. *La ligne droite, le parallélogramme, le cercle, l'ellipſe, & toutes les figures planes ſymmétriques fermées, le parallélépipède, le cylindre, la ſphère, l'ellipſoïde, & tous les ſolides de révolution engendrés par des moitiés de figures ſymmétriques fermées, ont leurs centres de gravité dans les milieux de leurs figures; ſavoir:*

La ligne droite, dans le milieu de ſa longueur.

Le parallélogramme, le cercle, l'ellipſe, & toutes les figures planes ſymmétriques fermées, dans le milieu de la ligne droite qui les coupe en deux parties égales.

Le parallélépipède & le cylindre, dans le milieu de la ligne droite tirée par les milieux ou centres des baſes oppoſées.

La ſphère & l'ellipſoïde, dans le milieu du diamètre ou de l'axe, c'eſt-à-dire, dans le centre.

DÉMONSTRATION.

Toutes ces figures ſont compoſées d'élémens, qui ont leurs centres de gravité dans la même ligne droite qui paſſe par le milieu de ces figures; & ces élémens pris deux à deux à diſtances égales du centre de la figure, ſont égaux. Ainſi chacune de ces figures a ſon centre de gravité dans ſon milieu *(n.° 28)*.

Pour rendre cette démonſtration ſenſible, on va parcourir la pluſpart des figures énoncées dans le Théorème.

Pour la ligne droite.

Tous les points d'une ligne droite AB étant égaux, en les prenant deux à deux à diſtances égales de ſon milieu C, ils ſeront néceſſairement également peſans. Ainſi le centre de gravité d'une ligne droite eſt dans ſon milieu C. Fig. 10.

Pour le parallélogramme, le cercle, l'ellipſe, & les figures planes ſymmétriques fermées, telles qu'un polygone régulier dont le nombre des côtés eſt pair. Fig. 11, 12, 13, 14 & 15.

Toutes ces figures ſont compoſées de lignes droites dont chacune a ſon centre de gravité dans ſon milieu.

Une ligne droite AB qui diviſe deux de ces élémens en deux parties égales, coupe auſſi tous les autres en deux parties égales. Ainſi ces élémens ont leurs milieux ou centres de gravité dans la même droite AB; & par conſéquent la droite AB diviſe ces figures en deux également.

Ces élémens pris deux à deux à diſtances égales du

milieu *C* de la droite *AB*, ſont égaux. Donc chacune de ces figures a ſon centre de gravité dans le milieu de la droite *AB* qui la diviſe en deux parties égales.

Toute autre ligne droite qui diviſera ces figures en deux parties égales, paſſera par le même point *C* milieu de la droite *AB*, & ſera coupée en deux également à ce point *C*. Donc le centre de gravité de chacune des figures énoncées, eſt au milieu de toute ligne droite qui la diviſe en deux parties égales.

Ce point du milieu C, *qui eſt le centre dans le cercle & dans l'ellipſe, ſe nomme auſſi* centre *dans le parallélogramme.*

Fig. 16, 17, 18 & 19. *Pour le parallélépipède, le cylindre, la ſphère & l'ellipſoïde.*

Le parallélépipède eſt compoſé de lames parallélogrammiques égales, dont les centres de gravité ſont les milieux.

Le cylindre eſt compoſé de lames circulaires égales, dont les milieux ou centres ſont les centres de gravité.

La ſphère, & le ſphéroïde elliptique ou l'ellipſoïde, ſont compoſés de lames circulaires dont les centres ou milieux ſont les centres de gravité.

Mais les milieux des élémens de chacune de ces figures ſont dans une même ligne droite *AB*, tirée par les milieux ou centres de deux lames ou élémens quelconques; & cette droite *AB* paſſe par le centre de la figure dans la ſphère & dans l'ellipſoïde.

Les élémens de chacune de ces figures, étant pris deux à deux à diſtances égales du milieu *C* de la droite *AB* qui les enfile tous par le milieu, ſont auſſi égaux, & par conſéquent également peſans.

Donc chacune de ces figures a ſon centre de gravité

dans le milieu de la droite *A B* qui paſſe par les centres de deux élémens quelconques. Dans le parallélépipède, de même que dans le cylindre, cette droite *A B* paſſe par les milieux ou centres des deux baſes oppoſées; & dans la ſphère ou dans l'ellipſoïde, cette droite *A B* paſſe par le centre de la figure.

Il en ſera de même des autres plans ou ſolides qui pourront être partagés en deux parties égales & ſemblables par une même ligne droite, ou par un même plan, lorſque les centres de gravité de tous les élémens ſeront dans une même ligne droite; puiſque tous les élémens de ces figures, pris deux à deux à diſtances égales du milieu de la droite qui les traverſera par leurs centres de gravité, ſeront égaux.

THÉOREME.

30. *Le centre de gravité du contour d'un parallélogramme, & du circuit d'un polygone régulier dont le nombre des côtés eſt pair, eſt au milieu* C *de la droite* A B *qui diviſe deux côtés oppoſés* M N, m n, *en deux parties égales.* Fig. 11 & 14.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées ou imaginées des lignes droites par les milieux ou centres de gravité de tous les côtés oppoſés: toutes ces droites ſe couperont en deux parties égales au même point *C*.

Or *(n.° 27)* les côtés oppoſés étant égaux, & par conſéquent également peſans, le centre de gravité de deux côtés oppoſés quelconques, tels que *M N, m n*, ſera dans le milieu *C* de la droite qu'on a tirée par les centres de gravité ou milieux de ces côtés.

Donc toutes les paires de côtés oppoſés auront leur centre de gravité commun au même point *C*; &

par conſéquent le contour de toute la figure aura ſon centre de gravité à ce point C pris au milieu d'une droite AB tirée par les milieux de deux côtés oppoſés quelconques MN, mn.

On peut remarquer qu'il n'eſt pas néceſſaire qu'un polygone dont le nombre des côtés eſt pair, ſoit régulier, pour que le centre de gravité ſoit dans le milieu C *de la droite* AB *qui joint les milieux* A, B *de deux côtés oppoſés quelconques* MN, mn; *& qu'il ſuffit que les côtés oppoſés ſoient égaux deux à deux; que les droites qui joignent les milieux des côtés oppoſés, paſſent toutes par un même point* C, *& ſoient diviſées chacune en deux parties égales à ce même point* C. *La démonſtration eſt la même pour cette eſpèce de polygone, que pour le polygone régulier dont le nombre des côtés eſt pair.*

COROLLAIRE.

31. Donc le centre de gravité de la circonférence d'un cercle ou d'une ellipſe, eſt à ſon centre, c'eſt-à-dire, au milieu d'un de ſes diamètres quelconques. Car le cercle peut être regardé comme un polygone régulier d'un nombre pair infini de côtés, & l'ellipſe comme un polygone d'un nombre pair infini de côtés dont les oppoſés ſont égaux deux à deux, & dans leſquels les droites qui joignent les milieux de ces côtés ſe coupent toutes en deux parties égales au centre de l'ellipſe, & par conſéquent au milieu d'un diamètre quelconque.

THEOREME.

Fig. 16, 17, 18 & 19.

32. *Les ſuperficies des parallélépipèdes & des cylindres, en y comprenant ou n'y comprenant pas les deux baſes oppoſées, & celles de la ſphère & de l'ellipſoïde, ont*

leurs centres de gravité dans les milieux de leurs figures.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la droite *AB*, en ſorte que dans le parallélépipède & dans le cylindre, elle paſſe par les milieux ou centres de gravité *A*, *B* des baſes oppoſées *MN*, *mn*; qu'elle ſoit un diamètre dans la ſphère, & que dans le ſphéroïde elliptique elle ſoit l'axe de révolution: comme les deux baſes oppoſées *MN*, *mn* du parallélépipède ou du cylindre ſont égales, le milieu *C* de la droite *AB* ſera le centre de gravité du ſyſtème de ces deux baſes.

Imaginons que les ſuperficies des figures dont il eſt queſtion, ſont diviſées en zones par une infinité de plans parallèles également éloignés les uns des autres; que dans le parallélépipède & le cylindre, ces plans ſont parallèles aux baſes oppoſées *MN*, *mn*; & qu'ils ſont perpendiculaires à l'axe *AB*, dans la ſphère & dans l'ellipſoïde. Ces zones infiniment étroites dont les baſes ſeront parallélogrammiques dans le parallélépipède, & circulaires dans les trois autres figures, auront leurs milieux ou centres de gravité dans la droite *AB*; de plus ces zones priſes deux à deux à diſtances égales du milieu *C* de la droite *AB*, ſeront égales. Donc le centre de gravité du ſyſtème compoſé de toutes ces zones, ſera dans le milieu *C* de la droite *AB*.

Or toutes ces zones compoſent la ſuperficie du parallélépipède ou celle du cylindre, ſans y comprendre les deux baſes oppoſées *MN*, *mn*, ou compoſent la ſuperficie entière de la ſphère ou du ſphéroïde elliptique.

Donc les ſuperficies des parallélépipèdes & des cylindres, ſans y comprendre les deux baſes oppoſées *MN*, *mn*, & celles de la ſphère & de l'ellipſoïde, ont chacune

leur centre de gravité au milieu de la droite *AB*, qui eſt auſſi le milieu de leur figure.

Nous avons vû que le même point *C* étoit le centre de gravité des deux baſes oppoſées *MN, mn*, dans le le parallélépipède & dans le cylindre. Ainſi les centres de gravité des ſuperficies des parallélépipèdes & des cylindres, en y comprenant les deux baſes oppoſées *MN, mn*, ſont encore dans les milieux de ces deux figures.

On doit remarquer que chaque ſolide de révolution autour d'un axe, aura auſſi le centre de gravité de ſa ſolidité & de ſa ſuperficie au milieu de cet axe, lorſque ſes élémens pris deux à deux à diſtances égales du milieu de l'axe ſeront égaux. En voici un exemple dans le Théorème ſuivant.

THEOREME.

Fig. 20. 33. *Le centre de gravité* P *de la ſurface convexe d'un ſegment de ſphère, eſt au milieu de la flèche* AN *de ce ſegment; & le centre de gravité d'une zone* DGLH *de ſphère, compriſe entre des plans parallèles, eſt au milieu* Q *de la droite* NM *qui joint les centres* N, M *de ſes baſes oppoſées.*

DÉMONSTRATION.

Imaginons la ſurface de la ſphère diviſée en une infinité de zones telles que *DEHI, EFIK, FGKL, &c.* par des plans qui coupent en parties égales le diamètre *AB*. Il eſt démontré en Géométrie, que toutes ces zones ſeront égales; & comme elles auront toutes leurs centres particuliers de gravité dans le même diamètre *AB*, où ſont leurs centres, il eſt clair que toutes les zones qui compoſeront la ſurface du ſegment *ADH*, & qui auront toutes leurs centres particuliers dans la

flèche AN, chargeront uniformément cette flèche. Ainſi la flèche AN chargée des poids égaux de ces zones élémentaires, aura ſon centre de gravité dans ſon milieu P.

Il en ſera de même de la zone $DGHL$ compoſée de zones élémentaires dont chacune aura ſon centre de gravité dans NM. Car ces petites zones égales répondant à des parties égales de NM, chargeront uniformément cette droite NM. Ainſi le centre de gravité de la droite NM chargée de la zone $DGHL$, ſera au milieu Q de ſa longueur.

THEOREME.

34. *Le centre de gravité d'un triangle* ABC, *eſt le point d'interſection* P *de deux lignes* AD, BE *menées de deux angles* A, B *aux milieux de leurs côtés oppoſés* BC, AC. Fig. 21.

DÉMONSTRATION.

Imaginant le triangle ABC compoſé d'élémens parallèles à BC, la droite AD, qui coupe le côté BC en deux parties égales, coupera pareillement en deux parties égales tous les élémens parallèles à BC. Ainſi les centres de gravité de tous ces élémens ſeront dans la droite AD. Donc *(n.° 20)* le centre de gravité du ſyſtème de tous ces élémens, c'eſt-à-dire, le centre de gravité du triangle ABC, ſera dans la droite AD tirée du ſommet d'un angle au milieu de ſon côté oppoſé BC.

Par la même raiſon, le centre de gravité du même triangle ABC ſera dans la droite BE tirée du ſommet de l'angle B au milieu de ſon côté oppoſé AC.

Donc le centre de gravité du triangle ABC eſt en

même temps dans les deux lignes AD, BE; & par conſéquent il eſt dans le point d'interſection P de ces deux lignes tirées de deux angles A, B aux milieux de leurs côtés oppoſés BC, AC.

COROLLAIRE I.

Fig. 21. 35. Ayant tiré une droite AD, d'un angle A du triangle ABC au milieu D du côté BC oppoſé à cet angle, ſi l'on fait $DP = \frac{1}{3} AD$, ou $AP = \frac{2}{3} AD$, le point P ſera encore le centre de gravité du triangle ABC. Pour le démontrer, on va faire voir que ſi d'un autre angle B on mène une ſeconde droite BE au milieu E de ſon côté oppoſé, l'interſection P des deux droites AD, BE, ſera telle qu'on aura $DP = \frac{1}{3} AD$.

Par les milieux D, E des côtés BC, AC, ſoit tirée la droite DE; elle ſera néceſſairement parallèle à AB. Ainſi les triangles DCE, BCA ſeront ſemblables, de même que les triangles DPE, APB.

Les triangles ſemblables DCE, BCA donneront $CE : CA :: DE : BA$; & les triangles ſemblables DPE, APB donneront $DE : AB :: DP : AP$.

Donc $CE : CA :: DP : AP$. Mais CE n'eſt que moitié de CA. Donc DP ſera pareillement moitié de AP; & par conſéquent DP ſera le tiers de la ligne totale AD.

COROLLAIRE II.

Fig. 22. 36. Donc ſi l'on fait $BF = \frac{1}{3} AB$, $CG = \frac{1}{3} AC$, & que l'on mène la droite FG, qui ſera néceſſairement parallèle à BC; le centre de gravité du triangle ſera dans le milieu P de cette droite FG.

En tirant par le ſommet A & par ce milieu P la droite AP juſqu'au côté BC, cette droite diviſera BC

proportionnellement à ſa parallèle FG, & le coupera par conſéquent en deux parties égales. Ainſi le centre de gravité du triangle ABC doit être au tiers de la droite DA, en prenant ce tiers à commencer du point D.

Mais DP eſt le tiers de DA, parce que *(conſtruction)* $BF = \frac{1}{3} AB$. Donc le centre de gravité du triangle ABC eſt au milieu P de FG.

COROLLAIRE III.

37. Si l'on fait attention que les élémens GH, IK, *&c.* du triangle ABC, ſont proportionnels aux parties AO, AQ, *&c.* de la droite AD qui les partage tous en deux parties égales, on pourra conclurre que toute figure dont les élémens auront leurs centres de gravité dans une même ligne droite, & ſeront proportionnels aux parties de cette ligne droite compriſe entr'eux & le commencement A des élémens, aura ſon centre de gravité P aux deux tiers de cette ligne droite, à commencer du point A où le premier élément eſt nul ou infiniment petit. Fig. 21.

Ce Corollaire aura ſon application, pour trouver le centre de gravité d'un paraboloïde.

PROBLEME.

38. *Trouver le centre de gravité de l'aire & du contour d'un polygone régulier dont le nombre des côtés eſt impair.*

SOLUTION.

Soit $ABCDE$ le polygone régulier propoſé. Si l'on diviſe deux quelconques de ſes côtés, par exemple, AB, BC, en deux parties égales, & que par leurs milieux F, G, l'on mène des droites FD, GE aux ſommets des angles oppoſés; le point P, où ſe cou- Fig. 23.

peront ces deux droites, ſera le centre de gravité de l'aire & du contour du polygone propoſé.

En imaginant le polygone compoſé d'élémens paralèles à AB, on verra aiſément que chacun de ces élémens aura ſon milieu ou ſon centre de gravité dans la droite FD; & l'on conclurra que le ſyſtème de tous ces élémens, ou le polygone lui-même, a le centre de gravité de ſon aire dans la droite FD.

Le contour du polygone a un côté BA dont le milieu ou centre de gravité F eſt dans la droite FD. Les autres côtés de ce contour ſont diſpoſés ſymmétriquement deux à deux de part & d'autre de la droite FD, en ſorte que les droites GH, IK, *&c.* qui joignent les milieux ou centres de gravité des côtés ſymmétriques correſpondans, ſont toutes coupées en deux également par FD. Ainſi *(n.° 26)* le centre de gravité de chaque paire de côtés, tels que BC, AE, ou CD, ED, eſt dans la droite FD; d'où il ſuit que le contour du polygone, qui eſt le ſyſtème de tous ſes côtés, a auſſi ſon centre de gravité dans la droite FD.

Par la même raiſon, l'aire du polygone propoſé & ſon contour ont leurs centres de gravité dans la droite GE tirée de l'angle E par le milieu de BC.

Donc le point P, où ſe coupent les deux droites FD, GE, eſt en même temps le centre de gravité de l'aire du polygone propoſé, & celui du contour du même polygone qu'on ſuppoſe régulier & dont le nombre des côtés eſt impair.

COROLLAIRE I.

Fig. 23. 39. Le cercle pouvant être regardé comme un polygone d'un nombre infini impair de côtés infiniment petits, on peut conclurre une ſeconde fois que le

centre de gravité de l'aire d'un cercle, & celui de ſa circonférence, eſt au milieu de ſon diamètre.

COROLLAIRE II.

40. Donc le centre de gravité de l'aire & celui du contour d'un polygone régulier, eſt au centre d'un cercle inſcrit ou circonſcrit à ce polygone; car les deux droites *FD*, *GE* ſe couperont au centre commun de ces cercles. Fig. 23.

PROBLEME.

41. *Trouver le centre de gravité* P *d'un plan rectiligne quadrilatère* ABCD. Fig. 24.

SOLUTION.

On partagera par une diagonale *BD* le quadrilatère donné, en deux triangles *ABD*, *CBD*; & après avoir déterminé les centres de gravité *E*, *F* de ces deux triangles, on mènera la droite *EF* qui contiendra néceſſairement le centre de gravité du quadrilatère; parce que les points *E*, *F* étant les centres de gravité des deux triangles *ABD*, *CBD*, le centre de gravité du ſyſtème de ces deux triangles ſera *(n.° 20)* dans la ligne droite qui joint leurs centres de gravité particuliers.

On mènera enſuite une ſeconde diagonale *AC*, pour partager le quadrilatère en deux autres triangles *ABC*, *ADC*: & aprés avoir déterminé les centres de gravité *G*, *H* de ces deux nouveaux triangles, on mènera la droite *GH* dans laquelle ſe trouvera encore, par la même raiſon, le centre de gravité du ſyſtème compoſé de ces deux triangles, c'eſt-à-dire, du quadrilatère propoſé.

Le centre de gravité du quadrilatère $ABCD$, étant en même temps dans les deux droites EF, GH, ſera donc néceſſairement dans l'interſection P de ces deux droites.

REMARQUES.

Fig. 24. **42.** L'opération que l'on vient d'expliquer, pour trouver le centre de gravité d'un quadrilatère rectiligne, peut être abrégée, en faiſant attention que pour trouver les centres de gravité E, F des deux triangles ABD, CBD, il a fallu diviſer la diagonale BD en deux parties égales en I, tirer les deux droites AI, CI, faire $IE = \frac{1}{3} AI$, & $IF = \frac{1}{3} CI$; ce qui rend la droite EF parallèle à l'autre diagonale AC, & $IL = \frac{1}{3} IN$. Par conſéquent pour trouver la première ligne droite EF, dans laquelle eſt le centre de gravité du quadrilatère, il étoit ſuffiſant (après avoir tiré les deux diagonales BD, AC,) de prendre le milieu I de la première diagonale BD, & de faire $IL = \frac{1}{3} IN$. Car en tirant par le point L une droite indéfinie EF parallèle à la ſeconde diagonale AC, le centre de gravité P demandé ſe ſeroit trouvé dans cette droite EF.

Par la même raiſon, pour trouver la ſeconde droite GH, où eſt auſſi le centre de gravité du quadrilatère, il falloit ſeulement prendre le milieu K de la ſeconde diagonale AC, faire $KM = \frac{1}{3} KN$, & par le point M mener GH parallèle à la première diagonale BD.

Fig. 25. **43.** Si le quadrilatère $ABCD$ avoit eu deux côtés AB, CD parallèles, on auroit pû prendre les milieux G, H de ces côtés parallèles, & tirer les trois droites GH, CG, HB. Faiſant enſuite $GE = \frac{1}{3} GC$, & $HF = \frac{1}{3} HB$, la ligne EF rencontrant GH en P,

P, auroit déterminé ce point P pour le centre de gravité du quadrilatère $ABCD$.

Pour le prouver, imaginons le quadrilatère partagé par une diagonale BC en deux triangles ACB, CBD. Il eſt clair que le point E, déterminé dans la droite GC qui paſſe par le milieu de AB, eſt le centre de gravité du triangle ACB; & que le point F, déterminé dans la droite HB qui paſſe par le milieu de CD, eſt le centre de gravité du triangle CBD. Ainſi la droite EF, qui paſſe par ces deux centres de gravité, doit contenir le centre de gravité du quadrilatère entier.

Imaginons encore le quadrilatère compoſé d'élémens parallèles aux deux côtés AB, CD qui ſont déjà parallèles. La droite GH, qui paſſe par les milieux G, H des côtés AB, CD, diviſera tous ces élémens en deux parties égales, & paſſera par conſéquent par tous leurs centres de gravité : ainſi le centre de gravité du ſyſtème de tous ces élémens, c'eſt-à-dire, du quadrilatère $ABCD$, ſera encore dans la droite GH.

Donc le centre de gravité du quadrilatère $ABCD$ eſt au point P commun aux deux droites EF, GH.

PROBLEME.

44. *Trouver le centre de gravité d'un pentagone ou d'un exagone rectiligne quelconque.* Fig. 26 & 27.

SOLUTION.

On diviſera ce polygone par une diagonale AD en deux parties, dont l'une ſoit un quadrilatère $ABCD$; l'autre partie ſera un triangle ADE, ou un ſecond quadrilatère $ADEF$, ſuivant que le polygone propoſé ſera un pentagone ou un exagone. Puis on cherchera, comme il a été dit (*n.os 35 & 42*), les centres de

gravité particuliers *L*, *H* de ces deux parties ſéparément priſes, & l'on mènera la droite *HL* dans laquelle ſe trouvera néceſſairement le centre de gravité du polygone propoſé.

On diviſera encore une fois le même polygone par une nouvelle diagonale *BE* en deux autres parties, dont l'une *BCDE* ſera un quadrilatère, & l'autre un triangle *BEA*, ou un quadrilatère *BEFA*, ſuivant que le polygone ſera un pentagone ou un exagone. Puis on cherchera de nouveau les centres de gravité *K*, *I* de ces deux parties en particulier, & l'on mènera la droite *IK* qui contiendra auſſi le centre de gravité du polygone propoſé.

Comme le centre de gravité du polygone ſera en même temps dans les deux droites *HL*, *IK*, il ſera néceſſairement au point d'interſection *P* de ces deux droites.

On trouvera de la même manière les centres de gravité de tous les plans rectilignes, en diviſant deux fois ces polygones en deux autres polygones dont on ſaura trouver les centres de gravité; parce que quand on ſait trouver le centre de gravité d'un triangle, d'un quadrilatère, d'un pentagone & d'un exagone, on peut trouver les centres de gravité des figures compoſées de deux de ces polygones, ſavoir, de l'eptagone, de l'octogone, de l'enéagone, & du décagone: & l'on pourra, par la même méthode, trouver les centres de gravité des figures rectilignes compoſées de deux des précédentes; & ainſi de ſuite. Mais il faut avouer que cette pratique eſt très-longue & trop ennuyeuſe.

45. *Comme un priſme quelconque eſt compoſé de lames égales & ſemblables à celles de ſes baſes oppoſées, & que la droite qui paſſe par les centres de gravité des*

deux baſes, paſſe auſſi par les centres de gravité de toutes les lames élémentaires parallèles à ces baſes, le centre de gravité du priſme ſe trouvera au milieu de cette ligne droite. Ainſi puiſque nous avons un moyen de trouver les centres de gravité de tous les plans rectilignes qui peuvent ſervir de baſes à des priſmes, nous pouvons auſſi déterminer les centres de gravité de tous les priſmes dont les baſes ſont des plans rectilignes.

THEOREME.

46. *Le centre de gravité d'une pyramide* ZABCDE *eſt dans la droite* ZF *tirée de ſon ſommet* Z *au centre de gravité* F *de ſa baſe.* Fig. 28.

DÉMONSTRATION.

Imaginons que la pyramide eſt compoſée d'une infinité de lames parallèles à ſa baſe *ABCDE.* On a vû *(Géom. n.° 442)* que toutes ces lames ſeront ſemblables à la baſe, & que la droite *ZF,* menée du ſommet à un point quelconque *F* de la baſe, paſſera par tous les points ſemblablement placés dans les lames parallèles; en ſorte que ſi le point *F* eſt le centre de gravité de la baſe *ABCDE,* tous les points où les lames parallèles ſeront rencontrées par la droite *ZF,* ſeront les centres de gravité de ces lames. Donc le centre de gravité du ſyſtème de toutes ces lames, ou de la pyramide *ZABCDE,* ſera dans la droite *ZF* tirée du ſommet Z de la pyramide au centre de gravité *F* de ſa baſe.

COROLLAIRE I.

47. Si du milieu *D* d'un côté *BC* commun à deux faces *ABC, SBC* d'une pyramide triangulaire Fig. 29.

$SABC$, l'on tire dans ces faces les droites DA, DS aux ſommets des angles oppoſés, & qu'après avoir pris ſur ces lignes des parties $DE = \frac{DA}{3}$, $DF = \frac{DS}{3}$, on mène par les points E, F les deux droites ES, FA aux ſommets oppoſés de la pyramide, ces deux droites qui ſe trouveront dans un même plan SAD, ſe couperont dans un point P qui ſera le centre de gravité de la pyramide triangulaire $SABC$.

Car le point D étant le milieu de BC, & DE, DF étant les tiers des deux droites DA, DS, on a vû *(n.° 35)* que les points E, F ſont les centres de gravité des deux faces triangulaires ABC, SBC.

Mais les triangles ABC, SBC étant conſidérés ſucceſſivement comme baſes de la pyramide, on a prouvé *(n.° 46)* que le centre de gravité de cette pyramide ſera dans la ligne SE & dans la ligne AF. Ainſi le point P, où les deux droites SE, AF ſe couperont, ſera le centre de gravité de la pyramide triangulaire $SABC$.

COROLLAIRE II.

Fig. 29. **48.** Donc le centre de gravité P de la pyramide triangulaire $SABC$, eſt tellement ſitué dans SE, que $EP = \frac{SE}{4}$.

Pour le démontrer, ſoit tirée la droite FE. Comme on a fait $DE = \frac{AD}{3}$ & $DF = \frac{SD}{3}$, les côtés AD, SD du triangle ASD ſeront coupés proportionnellement; ainſi EF, AS ſeront parallèles, & les deux triangles EDF, EPF ſeront ſemblables aux deux triangles ADS, SPA.

Or les triangles ſemblables EDF, ADS donneront

$DE : DA :: EF : AS$; & les triangles semblables EPF, SPA donneront $EF : SA :: EP : SP$. On aura donc $DE : DA :: EP : SP$. Mais *(constr.)* $DE = \frac{DA}{3}$. Ainsi $EP = \frac{SP}{3}$; & par conséquent EP est le quart de la ligne entière SE.

COROLLAIRE III.

49. Si du sommet Z d'une pyramide quelconque $ZABCDE$, l'on mène une droite ZF au centre de gravité F de sa base $ABCDE$, & qu'on prenne sur cette ligne une portion FP égale au quart de la ligne entière ZF, le point P sera le centre de gravité de cette pyramide. Fig. 28.

Pour le prouver, considérons que la pyramide $ZABCDE$ est partagée en autant de pyramides triangulaires $ZABE, ZEBD, ZDBC$, qu'il y a de triangles ABE, EBD, DBC dans sa base. Des centres de gravité G, H, I de ces triangles, concevons des droites GZ, HZ, IZ tirées au sommet Z commun à la pyramide entière & aux pyramides particulières qui la composent. Puis ayant fait $FP = \frac{FZ}{4}$, imaginons qu'on a mené par le point P, parallèlement à la base $ABCDE$, un plan MNO qui rencontre en M, N, O les droites GZ, HZ, IZ, & qui *(Géom. n.° 441)* les coupe proportionnellement, en sorte que $GM = \frac{GZ}{4}$, $HN = \frac{HZ}{4}$, $IO = \frac{IZ}{4}$. Il est clair *(n.° 48)* que les points M, N, O seront les centres de gravité particuliers des pyramides triangulaires $ZABE, ZEBD, ZDBC$.

Les centres de gravité particuliers M, N, O des pyramides $ZABE, ZEBD, ZDBC$ étant dans le

plan *MNO*, le centre de gravité du ſyſtème de ces pyramides, ou de la pyramide entière *ZABCDE*, ſera dans le même plan *MNO*. Mais *(n.° 46)* le centre de gravité de cette pyramide *ZABCDE* eſt auſſi dans la droite *ZF*. Donc le centre de gravité de la pyramide *ZABCDE* eſt au point *P* qu'on a pris au quart de la ligne *ZF*, & par lequel on a mené le plan *MNO*.

COROLLAIRE IV.

Fig. 30. 50. Donc ſi l'on tire une droite *SP* du ſommet *S* d'un cone au centre *F* de ſa baſe, & qu'on prenne ſur elle une partie *FP* égale au quart de *SF*, le point *P* ſera le centre de gravité de ce cone. Car le centre *F* de la baſe du cone eſt le centre de gravité de cette baſe, & le cone peut être regardé comme une pyramide d'une infinité de côtés.

COROLLAIRE V.

Fig. 28. 51. Une pyramide quelconque étant imaginée compoſée de lames parallèles & ſemblables à ſa baſe, & ſuppoſant une droite *ZF* tirée du ſommet à un point quelconque *F* de la baſe, on a vû *(Géom. n.° 442)* que chaque lame, telle que *RSTVX*, ſera à la baſe *ABCDE*, comme le quarré de la portion *ZY* compriſe entre cette lame & le ſommet, eſt au quarré de la ligne entière *ZF*; en ſorte que toutes les lames de la pyramide ſeront proportionnelles aux quarrés des portions de la droite *ZF*, compriſes entr'elles & le ſommet *Z*.

Si l'on ſuppoſe maintenant que la droite *ZF* eſt tirée du ſommet *Z* au centre de gravité de la baſe

ABCDE, & paſſe par conſéquent par les centres de gravité de toutes les lames parallèles à cette baſe, on reconnoîtra que la pyramide eſt un aſſemblage d'élémens qui ont leurs centres de gravité dans une même droite *ZF*, & qui ſont proportionnels aux quarrés des diſtances de leurs centres de gravité à un même point Z où eſt le premier élément : & l'on en conclurra que toute figure, dont les élémens auront leurs centres de gravité en ligne droite, & ſeront proportionnels aux quarrés des diſtances de leurs centres de gravité au premier élément, aura ſon centre de gravité placé dans la même droite, de manière que la portion de cette ligne compriſe entre le centre de gravité de la figure & celui du dernier élément qui ſera le plus grand, ſera égale au quart de cette ligne entière.

CHAPITRE III.

Des ſyſtèmes de corps, & des figures dont on trouve les centres de gravité par le moyen des centres de gravité des parties qui les compoſent.

2.de PROPOSITION FONDAMENTALE.

THEOREME.

52. *LORSQUE deux poids* K, L, *attachés aux extrémités d'une droite inflexible* AC *conſidérée ſans peſanteur & ſuſpendue par un fil* EF, *reſtent immobiles, ces poids ſont entr'eux en raiſon réciproque des parties de la droite* AC *compriſes entre le fil* EF *& leurs directions; c'eſt-à-dire, que* K : L : : CF : AF. Fig. 31.

DÉMONSTRATION.

Imaginons qu'une droite inflexible MN ſans peſanteur paſſe par les centres de gravité B, D des deux corps K, L. Cette droite inflexible ſans peſanteur n'ajoûtant rien aux deux corps K, L, il eſt évident que ces deux corps reſteront immobiles, & dans la ſituation où on les ſuppoſoit avant l'addition de la droite MN à leur ſyſtème.

Suppoſons que le poids de la moitié de la ſomme des deux corps K, L eſt également partagé à tous les points de la partie inflexible BD qui joint les centres de gravité de ces deux corps, & que la moitié du poids K ſe trouve diſtribuée le long de BO : il eſt clair que la moitié de l'autre poids L ſera répandue le long de DO, en ſorte que les poids K, L ſeront proportionnels aux deux parties BO, DO de la droite inflexible; c'eſt-à-dire, qu'on aura $K : L :: BO : DO$.

Suppoſons $BM = BO$, pour partager à tous les points de la partie inflexible BM l'autre moitié du poids K; en ſorte que le poids K entier ſoit uniformément répandu le long de MO, & que le centre de gravité de ce corps ainſi diſtribué ſe trouve au milieu B de MO.

Faiſons auſſi $DN = DO$, pour diſtribuer à tous les points de DN l'autre moitié du poids L; en ſorte que le poids L entier ſoit uniformément répandu le long de NO, & que le centre de gravité de ce corps ſe trouve dans le milieu de cette ligne NO.

Les deux poids K, L étant ainſi arrangés & diſtribués le long de la droite inflexible MN qui ſera double de ſa partie BD, il eſt clair que les centres de gravité de ces deux corps n'auront point changé de

place ; puiſqu'ils ſeront toûjours aux extrémités B, D des cordons verticaux AB, CD. Ainſi ces poids K, L répandus ou non répandus le long de la droite inflexible MN, agiront toûjours de toute leur peſanteur & de la même façon ſur les extrémités de la droite inflexible AC : d'où il ſuit que le premier équilibre ſuppoſé ne ſera point rompu, & que le ſyſtème ſoûtenu par le fil EF reſtera immobile.

De plus la ſomme des poids des deux corps K, L étant également diſtribuée à tous les points de la droite inflexible MN, le centre de gravité du ſyſtème ſera au milieu G de cette ligne : & comme tout le ſyſtème eſt ſoûtenu par le fil EF, le centre de gravité de la droite inflexible MN, c'eſt-à-dire, ſon milieu G, qu'on peut regarder comme le ſeul point chargé de tout le poids de ce ſyſtème, doit être dans la direction verticale de ce fil EF (*n.° 15*).

Nous allons maintenant démontrer que les poids K, L, ou les droites BO, DO qui leur ſont proportionnelles, ſont dans le même rapport que CF & AF.

Nous venons de voir que G eſt le milieu de MN, & nous avons fait la droite inflexible MN égale au double de BD, puiſque (*conſtr.*) $BM = BO$ & $DN = DO$. Ainſi $MG = BD$. Or retranchant BG de chaque membre, on aura MB ou $BO = DG$; & ajoûtant OG à chaque membre de cette dernière égalité, on aura $BG = DO$. Donc puiſque $K : L :: BO : DO$, on aura auſſi $K : L :: DG : BG$.

Les directions des cordons AB, CD, EF étant verticales, & par conſéquent parallèles entr'elles, les droites BD, AC ſeront coupées en parties propor-

tionnelles par ces directions. Ainſi l'on aura cette proportion, $DG : BG :: CF : AF$.

Mais nous venons de voir que $K : L :: DG : BG$.

Donc on aura enfin $K : L :: CF : AF$; c'eſt-à-dire, que deux poids appliqués aux extrémités d'une droite inflexible AC ſoûtenue en équilibre par un cordon EF, ſont en raiſon réciproque des parties de cette droite, compriſes entre les directions AB, CD de ces poids, & le cordon EF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 31. 53. Et réciproquement, deux poids K, L appliqués aux extrémités d'une droite inflexible AC, ſont ſoûtenus en équilibre par un cordon EF appliqué à cette droite inflexible, lorſque les parties de la droite AC compriſes entre les directions de ces poids & le cordon EF, ſont en raiſon réciproque de ces poids; c'eſt-à-dire, lorſque $K : L :: CF : AF$.

Car après avoir fait $K : L :: CF : AF$, ſi les corps K, L n'étoient point en équilibre ſur le point F de la droite inflexible AC, on pourroit les mettre en équilibre ſur quelqu'autre point I de la même droite; & l'on trouveroit *(n.° 52)* $K : L :: CI : AI$. On auroit donc $CF : AF :: CI : AI$, & par conſéquent $CF + AF : AF :: CI + AI : AI$, c'eſt-à-dire, $AC : AF :: AC : AI$; ce qui ſeroit abſurde.

Donc il eſt impoſſible que deux corps K, L appliqués aux extrémités d'une droite inflexible AC, ne ſoient point en équilibre ſur un point F de cette ligne, lorſque l'on a $K : L :: CF : AF$.

COROLLAIRE II.

54. Puiſque dans le cas où les deux corps K, L, que l'on regarde comme les ſeules choſes peſantes dans le ſyſtème, ſont ſoûtenus en équilibre par le cordon EF, on trouve $K : L :: CF : AF$; on aura auſſi *(componendo)* $K + L : K : L :: CF + AF : CF : AF$; c'eſt-à-dire, que (en nommant E la charge $K + L$ du cordon EF, & prenant AC pour $CF + AF$) on aura $E : K : L :: AC : CF : AF$. Fig. 31.

Et réciproquement, puiſque dans le cas où l'on trouve $K : L :: CF : AF$, les corps K, L ſont en équilibre ſur le point F de la droite inflexible AC, ils ſeront auſſi en équilibre ſur le même point F, lorſqu'on trouvera $\{{}^{K+L : L :: AC : AF}_{\text{ou } K+L : K :: AC : CF}\}$ Car dans ces deux cas on aura *(dividendo)* $K : L :: CF : AF$.

COROLLAIRE III.

55. Les longueurs des cordons AB, CD ne pouvant rien ajoûter aux actions des poids K, L ſur les extrémités de la droite AC, à moins que ce ne ſoit par leur peſanteur; ſi l'on ſuppoſe ces cordons ſans peſanteur, ou que l'on comprenne leurs peſanteurs dans celles des poids K, L, il eſt clair qu'en appliquant immédiatement les centres de gravité de ces deux corps K, L aux extrémités de la droite AC ſoûtenue par le cordon EF, l'équilibre ſubſiſtera toûjours; & qu'en appelant encore E la charge du fil EF, on aura $E : K : L :: AC : CF : AF$. Fig. 31. Fig. 32.

Comme on n'a ſuppoſé dans la Propoſition fondamentale & dans ſes Corollaires, aucune ſituation particulière à la droite AC, *on peut dire que le ſyſtème ſera toûjours immobile dans toutes les ſituations qu'on voudra lui*

donner, toutes les fois qu'on aura K : L : : CF : AF, *ou* K + L : K : L : : AC : CF : AF.

COROLLAIRE IV.

Fig. 32. 56. Donc le centre de gravité du ſyſtème de deux corps *K*, *L*, eſt un point *F* ſitué dans la droite *AC* qui joint leurs centres de gravité, de manière que *K* : *L* : : *CF* : *AF*, ou *(componendo)* de manière que *K* + *L* : *K* : *L* : : *AC* : *CF* : *AF*.

Car nous venons de voir qu'en ſoûtenant le ſyſtème de ces deux corps par un tel point *F*, au moyen d'un fil *EF*, il reſtera immobile dans toutes les ſituations qui lui ſeront données.

COROLLAIRE V.

Fig. 32. 57. La proportion *K* : *L* : : *CF* : *AF*, qui ſignifie que deux poids ſont entr'eux réciproquement comme les diſtances de leurs centres particuliers de gravité au centre de gravité du ſyſtème, donnera

1.° $AF = \frac{L \times CF}{K}$; ainſi connoiſſant *K*, *L*, & *CF*, on aura *AF*.

2.° $CF = \frac{K \times AF}{L}$; ainſi connoiſſant *K*, *L*, & *AF*, on aura *CF*.

3.° $\left.\begin{matrix} K = \frac{L \times CF}{AF} \\ L = \frac{K \times AF}{CF} \end{matrix}\right\}$ ainſi connoiſſant *CF*, *AF*, & l'un des deux corps *L*, *K*, on aura l'autre corps *K* ou *L*.

Les proportionnelles *K* + *L* : *K* : *L* : : *AC* : *CF* : *AF* donnent encore ces deux proportions :

$\left.\begin{matrix} K + L : K : : AC : CF. \\ K + L : L : : AC : AF. \end{matrix}\right\}$ dont on conclurra

1.° $\begin{cases} CF = \frac{K \times AC}{K+L} \\ AF = \frac{L \times AC}{K+L} \end{cases}$ ainſi connoiſſant les deux poids K, L, & la diſtance AC de leurs centres de gravité particuliers, on aura la diſtance de chaque centre particulier au centre de gravité du ſyſtème.

2.° $AC = \frac{(K+L) \times CF}{K} = \frac{(K+L) \times AF}{L}$; ainſi connoiſſant les deux corps K, L, avec la diſtance du centre de gravité de l'un d'eux au centre de gravité de leur ſomme, c'eſt-à-dire, de leur ſyſtème, on aura la diſtance AC compriſe entre les centres particuliers de gravité de ces deux corps.

3.° $\begin{cases} K = \frac{(K+L) \times CF}{AC} \\ L = \frac{(K+L) \times AF}{AC} \end{cases}$ ainſi connoiſſant la ſomme des deux poids K, L, la diſtance entre leurs centres particuliers de gravité, & la diſtance du centre de l'un d'eux au centre de gravité F du ſyſtème, on connoîtra le poids de chaque corps en particulier.

4.° $K + L = \frac{K \times AC}{CF} = \frac{L \times AC}{AF}$; ainſi connoiſſant le poids de l'un des deux corps K, L, avec la diſtance du centre de gravité particulier de chacun d'eux au centre de gravité du ſyſtème, on aura la ſomme des poids de ces deux corps.

PROBLEME.

58. *Etant donnés les poids de tant de corps* K, L, M, N *que l'on voudra, avec les ſituations de leurs centres particuliers de gravité* A, B, D, F; *trouver le centre de gravité du ſyſtème de tous ces corps, ſoit que* Fig. 33.

leurs centres particuliers de gravité ſe trouvent ou ne ſe trouvent pas dans un même plan.

SOLUTION.

On joindra les centres de gravité A, B de deux quelconques des corps donnés par une droite AB: diviſant enſuite cette droite en C, de manière que l'on ait $K + L : L :: AB : AC$, le point C ſera le centre de gravité du ſyſtème des deux corps K, L; & l'on pourra regarder la ſomme de ces deux corps comme un ſeul corps qui auroit ſon centre de gravité en C.

On joindra de même par une droite CD le centre de gravité C du ſyſtème des deux corps K, L & le centre de gravité D d'un troiſième corps quelconque M: & ayant diviſé cette droite CD en E, de manière que l'on ait $K + L : M :: ED : CE$, ou *(componendo)* $K + L + M : M :: CD : CE$, le point E ſera le centre de gravité du ſyſtème des trois corps K, L, M, les deux corps K, L devant être regardés comme un ſeul corps réuni au centre de gravité C; & *(n.° 56)* ce corps $K + L$ ſera équilibre avec le corps M ſur un point E, tel que $K + L : M :: ED : CE$.

Enfin l'on joindra par une droite EF le centre de gravité E du ſyſtème des trois corps K, L, M & le centre de gravité F du quatrième corps N; puis on diviſera cette droite EF en G, de manière que $K + L + M + N : N :: EF : EG$: & le point G ſera le centre de gravité du ſyſtème des quatre corps K, L, M, N; puiſque E étant le centre de gravité du ſyſtème des trois corps K, L, M, la ſomme $K + L + M$ des poids de ces trois corps, doit être cenſée ne faire qu'un même corps dont le centre

de gravité eſt en *E;* & pour mettre ce corps en équilibre avec le poids *N,* ſur un point *G,* il faudra *(n.° 56)* que $K + L + M : N :: GF : EG$, ou *(componendo)* $K + L + M + N : N :: EF : EG$.

On déterminera de la même façon le centre de gravité du ſyſtème d'un plus grand nombre de corps.

COROLLAIRE.

59. On trouvera par le moyen de ce Problème le centre de gravité *N* d'un plan rectiligne quelconque *ABCDEF,* comme il ſuit. Fig. 34.

On diviſera le polygone en triangles *ABC, ACD, ADE, AEF,* & l'on cherchera les centres de gravité particuliers *G, H, I, K* de ces triangles; puis ayant joint deux *G, H* de ces centres par une droite *GH* qui contiendra néceſſairement le centre de gravité des deux triangles *ABC, ACD,* on diviſera cette droite en *L,* de manière que l'on ait cette proportion: l'*aire ABCD* : l'*aire ABC* :: *GH* : *HL;* & ce point *L* ſera *(n.° 56)* le centre de gravité du ſyſtème des deux triangles *ABC, ACD,* c'eſt-à-dire, de l'aire *ABCD.*

On joindra par une droite *LI* le centre de gravité *L* que l'on vient de trouver avec le centre de gravité *I* d'un autre triangle *ADE;* & conſidérant que tout le poids de l'aire *ABCD* eſt en *L,* & que celui de l'aire *ADE* eſt en *I,* on diviſera *LI* en *M,* de manière qu'on ait cette ſeconde proportion: l'*aire ABCDE* : l'*aire ADE* :: *LI* : *LM;* & le point *M* ſera le centre de gravité de l'aire *ABCDE.*

On joindra pareillement par une droite *MK* le centre de gravité *M* qui vient d'être trouvé avec le centre de gravité *K* du triangle *AEF;* puis on

diviſera la droite *MK* en *N*, de manière que l'on ait l'*aire ABCDEF* : l'*aire AEF* :: *MK* : *MN*; & le point *N* ſera le centre de gravité du plan rectiligne *ABCDEF*.

REMARQUE.

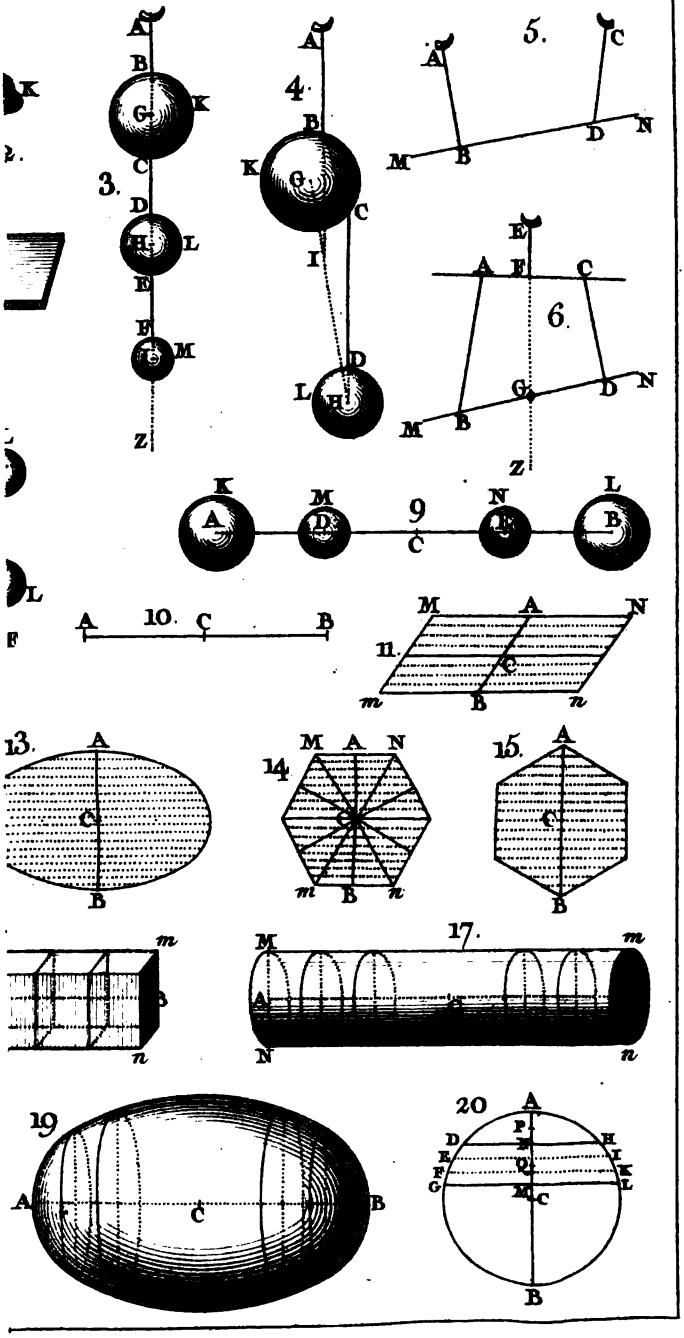
Fig. 35. 60. On doit remarquer qu'il eſt indifférent quel ordre on ſuive pour chercher le centre de gravité du polygone *ABCDEF*; & qu'au lieu de prendre les triangles de ſuite comme ils ſe préſentent, & comme nous les avons pris, on auroit pû ſuivre un ordre tout différent, par exemple, celui-ci.

Après avoir cherché le centre de gravité de chacun des triangles qui compoſent la figure plane propoſée, on auroit pû joindre par une droite *GK* les centres de gravité des deux triangles *ABC*, *AEF*; puis diviſer cette droite en *L*, de manière que l'on eût l'*aire* (*ABC* + *AEF*) : l'*aire ABC* :: *GK* : *KL*: & le point *L* auroit été le centre de gravité du ſyſtème des deux triangles *ABC*, *AEF*.

On pouvoit pareillement joindre par une droite *HI* les centres de gravité *H*, *I* des deux triangles *ACD*, *ADE*, diviſer cette droite en *M*, de manière que l'*aire ACDE* : l'*aire ADE* :: *HI* : *HM*; & l'on auroit eu le point *M* pour le centre de gravité de la figure *ACDE*.

Enfin l'on auroit joint par une droite *LM* les deux centres de gravité *L*, *M*, & l'on auroit encore diviſé cette droite en *N*, ſuivant cette proportion: l'*aire ABCDEF* : l'*aire ACDE* :: *LM* : *LN*; & le point *N* auroit été le centre de gravité du plan rectiligne *ABCDEF*.

CHAPITRE


3.
4.
5.
6.
9
10.
11.
13.
14
15.
17.
19
20

CHAPITRE IV.

Des figures dont on trouve les centres de gravité en considérant leurs momens.

DÉFINITIONS.

61. LE produit fait du poids d'un corps & de la distance qu'il y a du centre de gravité de ce corps à un point ou à une ligne droite quelconque, s'appelle *Moment* ou *Energie* de ce corps relativement à ce point ou à cette ligne : le terme *Moment* est le plus usité.

Il suit de là que si le moment d'un corps relativement à un point ou à une ligne est divisé par le poids de ce corps, le quotient sera la distance du centre de gravité de ce corps à ce point ou à cette ligne.

Le point par rapport auquel on considère le moment d'un corps se nomme *Centre du moment* de ce corps; & si l'on prend le moment d'un corps relativement à une ligne droite, cette droite s'appelle l'*Axe du moment* de ce corps.

Lorsque tous les corps d'un même système ont leurs centres de gravité en ligne droite, on considère ordinairement les momens particuliers de ces corps par rapport à un même point quelconque pris entre ces corps ou au delà de ces corps dans la ligne, ou dans le prolongement de la ligne qui passe par tous leurs centres de gravité.

Ainsi lorsqu'un système n'est composé que de deux corps *K, L*, on prend le plus souvent les momens de ces deux corps par rapport à un même point *I* de la droite *AC* prolongée ou non prolongée au delà des Fig. 36 & 37.

centres de gravité A, C de ces corps, & l'on exprime le moment du corps K par $K \times AI$, celui du corps L par $L \times CI$; & le moment du ſyſtème de ces deux corps qui ſont cenſés raſſemblés à leur centre de gravité commun F, eſt repréſenté par $(K + L) \times FI$, ou par $K \times FI + L \times FI$.

Fig. 40 & 41. Lorſque les corps K, L, M, N, O, P, qui compoſent un ſyſtème, ſont dans un même plan & n'ont pas tous leurs centres de gravité dans une même ligne droite, on conſidère leurs momens par rapport à un même axe YZ auquel on mène des perpendiculaires Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ii des centres de gravité de tous les corps K, L, M, N, O, P, pour avoir les diſtances de ces centres de gravité à l'axe YZ des momens; & l'on exprime le moment du corps K par $K \times Aa$, le moment du corps L par $L \times Bb$, celui du corps M par $M \times Cc$, celui du corps N par $N \times Dd$, celui du corps O par $O \times Ee$, & celui du corps P par $P \times Ii$. Enfin le moment du ſyſtème de tous ces corps imaginés réunis à un centre de gravité commun R, c'eſt-à-dire, à celui du ſyſtème, s'exprime par $(K + L + M + N + O + P) \times Rr$, ou par $K \times Rr + L \times Rr + M \times Rr + N \times Rr + O \times Rr + P \times Rr$.

Quoique les droites Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ii, par leſquelles on multiplie les poids des corps K, L, M, N, O, P pour avoir leurs momens, repréſentent les diſtances des centres de gravité de ces corps à l'axe des momens, & doivent par conſéquent être perpendiculaires à cet axe, on tire quelquefois ces droites Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ii obliquement à l'axe & parallèlement entr'elles; mais alors ces lignes s'appellent *Diſtances obliques* des centres de gravité des corps K, L, M, N, O, P à l'axe YZ, & cet axe

YZ se nomme *Axe oblique* des momens des corps *K, L, M, N, O, P.*

Lorsque le centre ou l'axe par rapport auquel on considère les momens des corps d'un système, est au centre de gravité de l'un de ces corps, ce corps n'a point de moment : car la distance de son centre de gravité au centre ou à l'axe d'après lequel on prend le moment, est nulle; & par conséquent le moment qui est le produit de cette distance nulle par le poids de ce corps, est aussi nul, c'est-à-dire, zéro. Il suit de là que le système de deux corps *K, L* n'a point de moment par rapport à son centre de gravité *F*, puisque les corps qui composent le système entier sont censés réunis à ce centre de gravité. Fig. 36.

62. Lorsque les corps *K, L, M, N, O, P* qui composent un système sont distribués des deux côtés de l'axe *YZ* ou du centre *r* par rapport auquel on considère leurs momens, les momens des corps *K, L, M, N* qui sont d'un côté, & ceux des corps *O, P* qui sont de l'autre côté, se nomment *momens opposés;* parce que ces corps tendent à faire tourner le système en sens opposés sur l'axe *YZ* ou sur le centre *r* des momens. Fig. 41 & 43.

Mais si les corps d'un même système sont d'un même côté de l'axe *YZ* ou du centre *r* des momens, les momens de tous ces corps s'appellent *momens convergens* ou *momens de même sens;* parce que tous les corps tendent à faire tourner le système du même sens sur l'axe *YZ* ou sur le centre *r* des momens. Fig. 40 & 42.

COROLLAIRE.

63. Donc les momens de deux corps *K, L* sont Fig. 36, 37, 38 & 39.

égaux, quand ils ſont conſidérés par rapport au centre de gravité F de leur ſyſtème, ou relativement à un axe quelconque GH qui paſſe par ce centre de gravité.

Car ſi F eſt le centre de gravité des deux corps K, L, on aura *(n.° 56)* $K : L :: CF : AF$; ainſi $K \times AF = L \times CF$; c'eſt-à-dire que les momens de deux corps K, L ſont égaux par rapport à leur centre commun de gravité F.

Fig. 36 & 37.

Si l'on conſidère les momens des mêmes corps K, L relativement à un axe quelconque GH mené par le centre de gravité F du ſyſtème de ces deux corps, les parallèles AG, CH qui entreront dans la compoſition des momens des corps K, L par rapport à l'axe GH, rendront ſemblables les triangles AFG, CFH; ainſi l'on aura $AG : CH :: AF : CF$. Mais *(n.° 56)* $AF : CF :: L : K$.

Donc $AG : CH :: L : K$, & par conſéquent $K \times AG = L \times CH$; c'eſt-à-dire que les momens des corps K, L ſont égaux, lorſqu'ils ſont conſidérés relativement à un axe quelconque GH mené par le centre de gravité F de leur ſyſtème.

Fig. 38 & 39.

THEOREME.

64. *Si des centres de gravité particuliers* A, C *de deux corps* K, L, *& du centre de gravité* F *de leur ſyſtème, on mène vers un même axe* YZ *des parallèles* AB, CD, FE *perpendiculaires ou obliques à cet axe; en ſorte que les produits* K × AB, L × CD, (K + L) × FE *repréſentent les momens des corps* K, L *& celui de leur ſyſtème relativement à l'axe* YZ *perpendiculaire ou oblique:*

Fig. 38.

1.° *Dans le cas où les deux corps* K, L *ſeront d'un même côté de l'axe* YZ, *l'on aura cette égalité* K × AB + L × CD = (K + L) × FE; *c'eſt-*

à-dire que la ſomme des momens des deux corps K, L *ſera égale au moment du centre de gravité* F *du ſyſtème de ces mêmes corps.*

2.° Dans le cas où l'axe YZ *des momens paſſera entre les deux corps* K, L, *on aura cette autre égalité* K × AB — L × CD = (K + L) × FE; *c'eſt-à-dire que la différence des momens des deux corps* K, L *ſera égale au moment du centre de gravité* F *de leur ſyſtème.* Fig. 39.

DÉMONSTRATION.

Par le centre de gravité *F* du ſyſtème ſoit tirée parallèlement à l'axe *YZ* une droite *GH* qui rencontrera en *G*, *H* les deux parallèles *AB*, *CD* prolongées s'il eſt néceſſaire : on aura $GB = FE = HD$. Ainſi Fig. 38 & 39.

PARTIE I. Dans le cas où les deux corps *K*, *L* ſeront d'un même côté de l'axe *YZ*, on aura Fig. 38.

AB ou $GB - AG = FE - AG$,

& CD ou $CH + HD = CH + FE$.

Donc $K \times AB = K \times (FE - AG) = K \times FE - K \times AG$,

& ... $L \times CD = L \times (CH + FE) = L \times CH + L \times FE$;

ainſi $K \times AB + L \times CD = K \times FE - K \times AG + L \times CH + L \times FE$.

Mais $K \times AG$, $L \times CH$ ſont les momens des deux corps *K*, *L* par rapport à un axe *GH* qui paſſe par le centre de gravité *F* du ſyſtème de ces deux corps; ainſi *(n.° 63)* ces momens ſont égaux, & par conſéquent $- K \times AG + L \times CH$ ſe détruiſent mutuellement.

Donc $K \times AB + L \times CD = K \times FE + L \times FE$.

Or $K \times FE + L \times FE = (K + L) \times FE$.

Ainſi $K \times AB + L \times CD = (K + L) \times FE$.

C. Q. F. 1.° D.

Fig. 39. PARTIE II. Dans le cas où l'axe YZ paſſera entre les deux corps K, L, on aura

AB ou $AG+GB=AG+FE$, & CD ou $CH-HD=CH-FE$;

ainſi $K\times AB=\left\{\begin{matrix}K\times AG\\+K\times FE\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}K\times AG\\+K\times FE\\+L\times FE\\-L\times FE,\end{matrix}\right.$

& $L\times CD=L\times CH-L\times FE$.

Donc ſi l'on retranche cette dernière égalité de la précédente, on aura

$K\times AB-L\times CD=K\times AG+K\times FE+L\times FE-L\times CH$.

Mais *(n.° 63)* $K\times AG=L\times CH$; ainſi les deux termes $K\times AG-L\times CH$ ſe détruiſent mutuellement.

Donc $K\times AB-L\times CD=K\times FE+L\times FE=(K+L)\times FE$. *C. Q. F. 2.° D.*

COROLLAIRE.

Fig. 38 & 39. 65. Les droites AB, CD, FE tirées vers l'axe YZ des momens par les centres de gravité A, C des corps K, L, & par celui F de leur ſyſtème, ayant été ſuppoſées ſeulement parallèles entr'elles, elles peuvent avoir telle obliquité qu'on voudra par rapport à la droite AC, & peuvent s'approcher de cette droite au point de ſe confondre avec elle.

Suppoſons que la première AB de ces trois parallèles ſe confond avec le prolongement ou une partie AI de la droite AC : la ſeconde parallèle CD ſe confondra avec CI, & la troiſième FE avec FI; en ſorte que les momens $K\times AB$, $L\times CD$, $(K+L)\times FE$ deviendront $K\times AI$, $L\times CI$, $(K+L)\times FI$.

Mais quelle que ſoit la poſition des parallèles AB, CD, FE, on vient de voir *(n.° 64)* que

Fig. 38. 1.° Dans le cas où le point I ſera dans le

prolongement de la droite AC qui joint les centres de gravité des deux corps K, L, on aura toûjours $K \times AB + L \times CD = (K + L) \times FE$. Ainſi l'on aura auſſi $K \times AI + L \times CI = (K + L) \times FI$.

2.° Et dans le cas où le point I ſera pris dans la droite AC entre les centres de gravité des corps K, L, ou aura $K \times AB - L \times CD = (K + L) \times FE$. Ainſi l'on aura auſſi $K \times AI - L \times CI = (K + L) \times FI$, Fig. 39.

C'eſt-à-dire, que ſi l'on conſidère les momens de deux corps K, L, & celui du centre de gravité de leur ſyſtème par rapport à un point I qui ſoit en ligne droite avec les centres de gravité de ces deux corps, le moment du centre de gravité des deux mêmes corps K, L ſera égal à la ſomme ou à la différence de leurs momens, ſuivant que le point I ſera pris dans le prolongement de la droite AC, ou dans la droite AC elle-même entre ces deux corps K, L. Fig. 36, 37, 38 & 39.

THEOREME.

66. *Si par les centres de gravité particuliers* A, B, C, D, E, I *de tant de corps* K, L, M, N, O, P *qu'on voudra, & par le centre de gravité* R *de leur ſyſtème, on mène vers un même axe* YZ *des droites* Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ii, Rr *parallèles entr'elles & perpendiculaires ou obliques à cet axe; en ſorte que les produits* $K \times Aa$, $L \times Bb$, $M \times Cc$, $N \times Dd$, $O \times Ee$, $P \times Ii$ *repréſentent les momens des corps* K, L, M, N, O, P, *par rapport à un axe* YZ *perpendiculaire ou oblique, & que* $(K + L + M + N + O + P) \times Rr$ *repréſente le moment du ſyſtème de tous ces corps relativement au même axe :* Fig. 40 & 41.

1.° *Dans le cas où tous les corps du ſyſtème ſeront d'un même côté de l'axe* YZ *des momens, l'on aura* Fig. 40.

$$\left.\begin{array}{l} K \times Aa \\ + L \times Bb \\ + M \times Cc \\ + N \times Dd \\ + O \times Ee \\ + P \times Ii \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times Rr;$$

c'eſt-à-dire, que la ſomme des momens de tous les corps du ſyſtème ſera égale au moment du centre de gravité R *de leur ſyſtème.*

Fig. 41. 2.° *Dans le cas où l'axe* YZ *des momens paſſera entre les corps du ſyſtème, on aura*

$$\left.\begin{array}{l} K \times Aa \\ + L \times Bb \\ + M \times Cc \\ + N \times Dd \\ - O \times Ee \\ - P \times Ii \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times Rr;$$

c'eſt-à-dire, que la différence qu'il y aura entre la ſomme des momens des corps K, L, M, N *qui ſeront d'un côté de l'axe* YZ, *& la ſomme des momens des corps* O, P, &c. *qui ſeront de l'autre côté du même axe, ſera égale au moment du centre de gravité* R *de tout le ſyſtème.*

DÉMONSTRATION.

Fig. 40 & 41. Suppoſant que le point *F* ſoit le centre de gravité du ſyſtème des deux premiers corps *K*, *L*, ſoit tirée la droite *Ff* parallèlement à *Aa* ou *Bb* : on aura *(n.° 64)* $K \times Aa + L \times Bb = (K + L) \times Ff$.

Imaginant enſuite que les deux corps *K*, *L* ne compoſent qu'un ſeul corps $(K + L)$ dont tout le poids ſoit appliqué au centre de gravité *F*, & ſuppoſant que *G* eſt le centre de gravité d'un ſyſtème compoſé de ce corps $K + L$ & du corps *M*, ſi

l'on tire Gg parallèlement à Ff ou à Cc, l'on aura encore *(n.° 64)* $(K+L)\times Ff+M\times Cc=(K+L+M)\times Gg$. Mais on vient de voir que $K\times Aa+L\times Bb=(K+L)\times Ff$; On aura donc $K\times Aa+L\times Bb+M\times Cc=(K+L+M)\times Gg$.

Considérant maintenant les trois corps K, L, M, comme un seul & même corps $K+L+M$ dont tout le poids est réuni au centre de gravité G de leur système, & supposant que H est le centre de gravité d'un nouveau système composé de ce corps $K+L+M$ & d'un second corps N; si l'on mène Hh parallèlement à Gg ou à Dd, on aura *(n.° 64)* $(K+L+M)\times Gg+N\times Dd=(K+L+M+N)\times Hh$. Mais on a trouvé $K\times Aa+L\times Bb+M\times Cc=(K+L+M)\times Gg$.

On aura donc $\left.\begin{matrix}K\times Aa\\+L\times Bb\\+M\times Cc\\+N\times Dd\end{matrix}\right\}=(K+L+M+N)\times Hh$.

Enfin regardant les quatre corps K, L, M, N comme un seul corps $K+L+M+N$ dont tout le poids seroit appliqué au centre de gravité H de leur système; considérant aussi les deux corps O, P comme un seul corps dont tout le poids seroit réuni à leur centre de gravité commun Q; & supposant que R est le centre de gravité du système composé des deux nouveaux corps $(K+L+M+N)$ & $(O+P)$: soient menées les droites Rr, Qq parallèles à Hh. Cela posé,

Lorsque les deux corps $(K+L+M+N)$ & $(O+P)$ qui composent le système entier proposé, seront situés d'un même côté de l'axe YZ par rapport auquel on considère les momens, on aura *(n.° 64)* Fig. 40.

$$\left.\begin{matrix}(K+L+M+N)\times Hh\\+(O+P)\times Qq\end{matrix}\right\}=(K+L+M+N+O+P)\times Rr.$$

Fig. 41. Et lorſque les deux corps $(K+L+M+N)$ & $(O+P)$ dont le ſyſtème eſt formé, ſeront des deux côtés de l'axe YZ par rapport auquel on conſidère les momens, on aura auſſi *(n.° 64)*

$$\left.\begin{matrix}(K+L+M+N)\times Hh\\ -(O+P)\times Qq\end{matrix}\right\}=(K+L+M+N+O+P)\times Rr.$$

Fig. 40 & 41. Mais on vient de trouver

$$\left.\begin{matrix}K\times Aa\\ +L\times Bb\\ +M\times Cc\\ +N\times Dd\end{matrix}\right\}=(K+L+M+N)\times Hh.$$

Et Qq, Ee, Ii étant parallèles, on aura *(n.° 64)*

$$O\times Ee+P\times Ii=(O+P)\times Qq$$

$$\text{ou } -O\times Ee-P\times Ii=-(O+P)\times Qq.$$

Fig. 40, Donc 1.° dans le cas où les deux corps compoſés $(K+L+M+N)$ & $(O+P)$ ſeront d'un même côté de l'axe YZ, on aura

$$\left.\begin{matrix}K\times Aa\\ +L\times Bb\\ +M\times Cc\\ +N\times Dd\\ +O\times Ee\\ +P\times Ii\end{matrix}\right\}=(K+L+M+N+O+P)\times Rr.$$

C. Q. F. 1.° D.

Fig 41. 2.° Dans le cas où les deux corps compoſés $(K+L+M+N)$ & $(O+P)$ ſeront des deux côtés de l'axe YZ, on aura

$$\left.\begin{matrix}K\times Aa\\ +L\times Bb\\ +M\times Cc\\ +N\times Dd\\ -O\times Ee\\ -P\times Ii\end{matrix}\right\}=(K+L+M+N+O+P)\times Rr$$

C. Q. F. 2.° D.

COROLLAIRE I.

Fig. 44 & 45. 67. Si l'axe YZ par rapport auquel on conſidère

les momens, paſſe par le centre de gravité d'un corps K du ſyſtème, la diſtance Aa du centre de gravité de ce corps ſera nulle, & par conſéquent le moment $K \times Aa$ de ce corps ſera anéanti. Ainſi l'égalité

$$\left.\begin{array}{l} K \times Aa \\ + L \times Bb \\ + M \times Cc \\ + N \times Dd \\ + O \times Ee \\ + P \times Ii \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times Rr$$

qu'on a trouvée pour le cas de la figure 40, deviendra pour celui de la figure 44

$$\left.\begin{array}{l} L \times Bb \\ + M \times Cc \\ + N \times Dd \\ + O \times Ee \\ + P \times Ii \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times Rr;$$

& la ſeconde égalité

$$\left.\begin{array}{l} K \times Aa \\ + L \times Bb \\ + M \times Cc \\ + N \times Dd \\ - O \times Ee \\ - P \times Ii \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times Rr$$

qu'on a trouvée dans le cas de la fig. 41, deviendra dans celui de la fig. 45

$$\left.\begin{array}{l} L \times Bb \\ + M \times Cc \\ + N \times Dd \\ - O \times Ee \\ - P \times Ii \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times Rr.$$

Ainſi dans le cas où l'axe YZ des momens paſſera par le centre de gravité de quelqu'un des corps du ſyſtème, ſi tous les autres corps ſont d'un

même côté de l'axe, la ſomme de leurs momens particuliers ſera égale au moment du centre de gravité de tout le ſyſtème ; & ſi ces autres corps ſont diſtribués des deux côtés de l'axe, la différence qu'il y aura entre la ſomme des momens des corps ſitués d'un côté de cet axe, & la ſomme des momens des corps placés de l'autre côté du même axe, ſera égale au moment du centre de gravité de tout le ſyſtème.

COROLLAIRE II.

Fig. 40, 41, 44 & 45. 68. Puiſque le moment du centre de gravité *R* du ſyſtème entier de tant de corps *K, L, M, N, O, P* qu'on voudra, n'eſt compoſé que des momens particuliers des corps de ce ſyſtème, que le moment particulier de chaque corps ne dépend que du poids de ce corps & de la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe *YZ* des momens, & que les parties ab, bc, cd, &c. de l'axe compriſes entre les parallèles *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *&c.* menées vers l'axe, n'entrent point dans la compoſition des momens ; lorſque toutes les parties ab, bc, cd, &c. de l'axe, deviendront nulles, & que toutes les parallèles *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *&c.* menées vers l'axe *YZ* ſeront dans une même ligne, (ce qui arrivera lorſque tous les corps *K, L, M, N, O, P* auront leurs centres de gravité particuliers en ligne droite, & que l'on conſidérera les momens par rapport à un point r de cette ligne) il eſt clair que tout ce qu'on a démontré dans le Théorème & ſon premier Corollaire, aura encore lieu ; c'eſt-à-dire que

Fig. 42, 43, 46 & 47.

Fig. 42. 1.° Si tous les corps *K, L, M, N, O, P* ont leurs centres de gravité en ligne droite, & que l'on conſidère leurs momens par rapport à un point r pris dans le prolongement de cette ligne, on aura,

en ſuppoſant que R eſt le centre de gravité du ſyſtème entier,

$$\left.\begin{array}{l} K \times Ar \\ + L \times Br \\ + M \times Cr \\ + N \times Dr \\ + O \times Er \\ + P \times Ir \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times Rr.$$

2.° Si tous les corps K, L, M, N, O, P du ſyſtème dont on ſuppoſe le centre de gravité placé en R, ont leurs centres de gravité en ligne droite, & que l'on conſidère leurs momens par rapport à un point r pris dans cette ligne entre les corps du ſyſtème, on aura Fig. 43.

$$\left.\begin{array}{l} K \times Ar \\ + L \times Br \\ + M \times Cr \\ + N \times Dr \\ - O \times Er \\ - P \times Ir \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times Rr.$$

3.° Tous les corps K, L, M, N, O, P ayant toûjours leurs centres de gravité en ligne droite, & le centre de gravité R de leur ſyſtème étant par conſéquent dans la même ligne droite; ſi l'on conſidère leurs momens par rapport à un point A qui ſoit le centre de gravité d'un corps K placé à l'extrémité du ſyſtème, on aura Fig. 46.

$$\left.\begin{array}{l} L \times BA \\ + M \times CA \\ + N \times DA \\ + O \times EA \\ + P \times IA \end{array}\right\} = (K + L + M + N + O + P) \times RA.$$

4.° Tous les corps qui compoſent le ſyſtème ayant encore leurs centres de gravité en ligne droite, ſi l'on conſidère leurs momens par rapport au centre A Fig. 47.

d'un corps K qui ne ſoit point à l'extrémité du ſyſtème, on aura

$$\left.\begin{array}{l} L \times BA \\ +M \times CA \\ +N \times DA \\ -O \times EA \\ -P \times IA \end{array}\right\} = (K+L+M+N+O+P) \times RA.$$

COROLLAIRE III.

69. Si l'on diviſe par la ſomme $K+L+M+N+O+P$ des poids des corps qui compoſent le ſyſtème, les différentes égalités qu'on a trouvées pour les différens cas relatifs aux figures 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46 & 47, & qu'on regarde toûjours YZ comme l'axe des momens, & R comme le centre de gravité du ſyſtème entier, l'on trouvera

pour le cas de la fig. 40 $\left.\begin{array}{l} K \times Aa+L \times Bb+M \times Cc+N \times Dd+O \times Ee+P \times Ii \\ \hline K+L+M+N+O+P \end{array}\right\} = Rr$

pour le cas de la fig. 41 $\left.\begin{array}{l} K \times Aa+L \times Bb+M \times Cc+N \times Dd-O \times Ee-P \times Ii \\ \hline K+L+M+N+O+P \end{array}\right\} = Rr$

pour le cas de la fig. 44 $\left.\begin{array}{l} * \qquad L \times Bb+M \times Cc+N \times Dd+O \times Ee+P \times Ii \\ \hline K+L+M+N+O+P \end{array}\right\} = Rr$

pour le cas de la fig. 45 $\left.\begin{array}{l} * \qquad L \times Bb+M \times Cc+N \times Dd-O \times Ee-P \times Ii \\ \hline K+L+M+N+O+P \end{array}\right\} = Rr$

pour le cas de la fig. 42 $\left.\begin{array}{l} K \times Ar+L \times Br+M \times Cr+N \times Dr+O \times Er+P \times Ir \\ \hline K+L+M+N+O+P \end{array}\right\} = Rr$

pour le cas de la fig. 43 $\left.\begin{array}{l} K \times Ar+L \times Br+M \times Cr+N \times Dr-O \times Er-P \times Ir \\ \hline K+L+M+N+O+P \end{array}\right\} = Rr$

pour le cas de la fig. 46 $\left.\begin{array}{l} * \qquad L \times BA+M \times CA+N \times DA+O \times EA+P \times IA \\ \hline K+L+M+N+O+P \end{array}\right\} = RA$

pour le cas de la fig. 47 $\left.\begin{array}{l} * \qquad L \times BA+M \times CA+N \times DA-O \times EA-P \times IA \\ \hline K+L+M+N+O+P \end{array}\right\} = RA.$

Ainſi lorſque toutes les parties d'un ſyſtème ſeront dans un même plan, & que l'on connoîtra le poids de chacune de ces parties avec la diſtance de ſon

centre de gravité à un axe *YZ*, on pourra toûjours trouver par ces formules la distance du centre de gravité de tout le système au même axe *YZ*.

COROLLAIRE IV.

70. On a vû *(n.° 25)* que les superficies peuvent être réputées chargées également dans tous leurs points, & qu'elles peuvent par conséquent être considérées comme des poids proportionnels à leurs étendues : cela posé, l'on pourra par les principes que l'on vient d'expliquer, trouver la distance du centre de gravité d'un plan quelconque rectiligne à telle ligne droite qu'on voudra, en considérant cette ligne comme un axe auquel on rapportera les momens des parties & celui de la totalité de ce plan.

Car après avoir partagé le plan proposé *EFGHIO* en triangles *EFG, EGH, EHI, EIO*, si l'on cherche les centres de gravité particuliers *A, B, C, D* de ces triangles, & qu'ayant supposé le centre de gravité de la figure entière placé en *R*, l'on mène vers un même axe *YZ* des parallèles *A*a, *B*b, *C*c, *D*d, & qu'on leur imagine encore une parallèle *R*r ; en considérant les triangles *EFG, EGH, EHI, EIO* comme des poids *K, L, M, N* proportionnels à ces triangles & réunis à leurs centres de gravité particuliers *A, B, C, D*, il est clair que *(n.° 69)* Fig. 52 & 53.

1.° Dans le cas où tous les poids *K, L, M, N*, ou les centres de gravité *A, B, C, D* de tous les triangles, seront d'un même côté de l'axe *YZ*, on aura Fig. 52.

$$\frac{K \times Aa + L \times Bb + M \times Cc + N \times Dd}{K + L + M + N} = Rr,$$

ou $$\frac{EFG \times Aa + EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} = Rr.$$

Fig. 52. 2.° Dans le cas où les centres de gravité particuliers A, B, C, D des triangles, seroient distribués des deux côtés d'un axe yz vers lequel on mèneroit des droites Aa, Bb, Cc, Dd, Rr parallèles entr'elles; si le centre de gravité A étoit seul d'un côté de l'axe yz, on auroit

$$\frac{EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd - EFG \times Aa}{EFGHIO} = Rr.$$

Fig. 53. 3.° Dans le cas où l'axe YZ ou yz passeroit par le centre de gravité A de quelque triangle, & que les centres de gravité des autres triangles seroient tous d'un même côté de cet axe, on auroit

$$\frac{* EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} = Rr,$$

$$\text{ou} \quad \frac{* EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} = Rr.$$

PROBLEME.

71. *Trouver le centre de gravité d'un système composé de tant de corps qu'on voudra, situés dans un même plan.*

SOLUTION.

Fig. 48 & 49. On choisira deux axes quelconques YZ, yz qui se couperont en tel point V qu'on voudra, & qui feront entr'eux un angle quelconque YVy. Puis ayant mené par les centres de gravité particuliers des corps K, L, M, N, vers le premier axe YZ, des parallèles Aa, Bb, Cc, Dd au second axe yz, & vers le second axe yz des parallèles Aa, Bb, Cc, Dd au premier axe YZ, on trouvera *(n.° 69)* les longueurs des droites Rr, Rr (qu'on imagine tirées par le centre de gravité inconnu R du système) la première vers le premier axe YZ parallèlement au second yz, & la seconde

ſeconde vers le ſecond axe yz, parallèlement au premier.

Enſuite ayant pris ſur le ſecond axe yz une partie Vr, égale à la valeur qu'on a trouvée pour Rr, & ayant mené par le point r une parallèle rQ au premier axe YZ, on ſera ſûr que le centre de gravité R du ſyſtème eſt dans cette ligne rQ; en ſorte que ſi l'on prend ſur cette ligne rQ, à commencer de l'axe yz, une partie égale à la valeur qu'on a trouvée pour Rr, on aura le point R ou le centre de gravité du ſyſtème propoſé. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

72. Un plan rectiligne *EFGHIO* étant partagé en triangles *EFG, EGH, EHI, EIO*, & chaque triangle étant conſidéré comme un poids placé au centre de gravité de ce triangle; il eſt évident que le problème qu'on vient de réſoudre, pour trouver le centre de gravité de tant de corps qu'on voudra, ſitués dans un même plan, ſervira à trouver le centre de gravité d'un plan rectiligne quelconque, comme on va le voir dans les exemples ſuivans. Fig 52 & 53.

EXEMPLES.

73. *On demande le centre de gravité* R *d'un plan rectiligne* EFGHIO *compoſé de quatre triangles* EFG, EGH, EHI, EIO *dont les centres de gravité* A, B, C, D *& les étendues ſont connus; ou le centre de gravité* R *du ſyſtème de quatre corps* K, L, M, N *ſitués dans un même plan, dont les poids & l'arrangement ſont donnés par les meſures ſuivantes.* Fig. 52, 53, 48 & 49.

On ſuppoſe les quatre triangles $EFG : EGH : EHI : EIO$ ou les quatre poids $K : L : M : N$ } $:: 2 : 4 : 5 : 3$.

Après avoir choiſi deux axes quelconques YZ, yz, & mené par les centres de gravité A, B, C, D des quatre triangles ou des quatre corps, vers le premier axe YZ, des parallèles Aa, Bb, Cc, Dd au ſecond axe yz, & vers le ſecond axe yz des parallèles Aa, Bb, Cc, Dd au premier axe YZ, on imaginera encore par le centre de gravité R du ſyſtème des parallèles Rr, Rr aux mêmes axes, terminées par ces deux axes.

Fig. 52 & 48. Si l'on ſuppoſe $Aa : Bb : Cc : Dd :: 10 : 15 : 27 : 37$, comme dans le cas des figures 52 & 48, où tous les centres de gravité particuliers ſont d'un même côté de l'axe YZ, on aura

$$Rr \text{ ou } \begin{cases} \dfrac{EFG \times Aa + EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} \\ \text{ou } \dfrac{K \times Aa + L \times Bb + M \times Cc + N \times Dd}{K + L + M + N} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{20 + 60 + 135 + 111}{14} \\ \text{ou } 23\ \frac{2}{7}. \end{cases}$$

Ainſi, prenant ſur le ſecond axe yz, à commencer du point V où ſe coupent les deux axes, une partie $Vr = 23\ \frac{2}{7}$, & menant par le point r une droite rQ parallèle au premier axe YZ, le centre de gravité R du ſyſtème ſera ſûrement dans cette droite rQ, & l'on n'aura plus qu'à trouver la diſtance Rr de ce centre de gravité au ſecond axe yz.

Suppoſons que le ſecond axe yz paſſe entre le centre de gravité A de la première partie du ſyſtème, & les centres de gravité B, C, D des autres parties; & que par les meſures données ou priſes ſur la figure, on a trouvé les diſtances

$Aa : Bb : Cc : Dd :: 7 : 9\frac{1}{2} : 17 : 13\frac{2}{3}$,
on aura *(n.° 69)*

$$Rr \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}\dfrac{EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd - EFG \times Aa}{EFGHIO} \\ \text{ou } \dfrac{L \times Bb + M \times Cc + N \times Dd - K \times Aa}{K + L + M + N}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{38 + 85 + 41 - 14}{14} \\ \text{ou } 10\frac{5}{7}.\end{array}\right.$$

Ainſi prenant ſur rQ qu'on vient de trouver, une partie $rR = 10\frac{5}{7}$, le point R ſera le centre de gravité du ſyſtème propoſé.

Ordinairement on mène les deux axes YZ, yz auxquels on rapporte les momens, par le centre de gravité particulier A de quelque partie du ſyſtème, & pour s'épargner l'embarras d'avoir à diſtinguer les momens qui doivent avoir le ſigne $+$ & ceux qui doivent avoir le ſigne $-$, on fait en ſorte que les centres de gravité B, C, D de toutes les autres parties, ſoient placés d'un même côté des axes que l'on choiſit. Fig. 53 & 49.

Suppoſons encore { les triangles $EFG : EGH : EHI : EIO$ / ou les poids $K : L : M : N$ } $:: 2 : 4 : 5 : 3$,

les droites menées de leurs centres de gravité { à l'axe YZ; $* Bb : Cc : Dd :: * 5 : 17 : 27$ / à l'axe yz; $* Bb : Cc : Dd :: * 16\frac{1}{2} : 24 : 20\frac{2}{3}$,

on trouvera *(n.° 69)*

$$Rr \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}\dfrac{* EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} \\ \text{ou } \dfrac{* L \times Bb + M \times Cc + N \times Dd}{K + L + M + N}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{* 20 + 85 + 81}{14} \\ \text{ou } 13\frac{2}{7}.\end{array}\right.$$

$$\& \; Rr \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}\dfrac{* EGH \times Bb + EHI \times Cc + EIO \times Dd}{EFGHIO} \\ \text{ou } \dfrac{* L \times Bb + M \times Cc + N \times Dd}{K + L + M + N}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{* 66 + 120 + 62}{14} \\ \text{ou } 17\frac{5}{7}.\end{array}\right.$$

Ainſi prenant d'abord ſur le ſecond axe yz, à

commencer du point *V* ou *A* où ſe coupent les deux axes, une partie *Ar* de $13\frac{2}{7}$, & menant par le point *r* une droite *rQ* parallèle au premier axe *YZ*, le centre de gravité *R* qu'on demande ſera dans cette droite *rQ*; puis prenant ſur la droite *rQ* une partie $Rr = 17\frac{1}{7}$, le point *R* qu'on déterminera, ſera le centre de gravité du ſyſtème propoſé.

Fig. 50 & 51. *Il eſt évident que, ſi les centres de gravité* A, B, C, D *des mêmes corps* K, L, M, N *étoient diſpoſés en ligne droite, le centre de gravité* R *de leur ſyſtème ſeroit dans la même ligne droite, & qu'on n'auroit pas beſoin de deux axes, mais ſeulement d'un axe* YZ, *pour déterminer la poſition du centre de gravité* R *de ce ſyſtème; ainſi l'on ſe contenteroit de chercher* (n.° 69) *la diſtance de ce centre de gravité* R *à un point* V *pris dans la ligne des centres de gravité ou dans ſon prolongement.*

Fig. 50. Suppoſons { les poids des corps $K : L : M : N :: 2 : 4 : 5 : 3$; les diſtances de leurs centres de gravité à l'axe *YZ* } $AV : BV : CV : DV :: 10 : 15 : 27 : 37$.

on aura

$$RV \text{ ou } \frac{K \times AV + L \times BV + M \times CV + N \times DV}{K + L + M + N} = \frac{20 + 60 + 135 + 111}{14} = 23\frac{2}{7}.$$

Ainſi le centre de gravité du ſyſtème des corps K, L, M, N *ſera déterminé.*

Fig. 51. Suppoſons encore { les poids des mêmes corps $K : L : M : N :: 2 : 4 : 5 : 3$; les diſtances de leurs centres de gravité particuliers à celui *A* d'un corps extrême } $* BA : CA : DA :: * 5 : 17 : 27$.

on aura RA ou $\frac{* L \times BA + M \times CA + N \times DA}{K + L + M + N} = \frac{* 20 + 85 + 81}{14} = 13\frac{2}{7}$.

Ainſi l'on connoîtra la poſition du centre de gravité commun de tous les corps propoſés.

REMARQUE.

74. Jusques ici l'on a toûjours supposé que les centres de gravité de tous les corps ou de toutes les parties d'un même système étoient dans un même plan, & l'on a considéré leurs momens relativement à un axe situé dans ce plan. Fig. 54.

S'il arrivoit que les centres de gravité des parties *K, L, M, N* d'un même système, ne fussent pas tous dans un même plan, l'on considéreroit leurs momens, non par rapport à un axe, mais relativement à un plan *YZ* vers lequel on mèneroit ou l'on imagineroit par les centres de gravité particuliers *A, B, C, D*, & par le centre de gravité général *R*, des perpendiculaires *Aa, Bb, Cc, Dd, Rr;* cela posé, les momens des parties *K, L, M, N* & celui de leur système seroient représentés par les produits suivans

$K \times Aa; L \times Bb; M \times Cc; N \times Dd; (K+L+M+N) \times Rr.$

Il est facile de prouver par un raisonnement semblable à celui du dernier Théorème, que la somme des momens des corps qui seront placés d'un même côté du plan *YZ* par rapport auquel on considère les momens, sera égale au moment du centre de gravité du système de ces mêmes corps, & que la différence qu'il y aura entre la somme des momens des parties *M, N* placées d'un même côté du plan *YZ*, & la somme des momens des parties *K, L* situées de l'autre côté du même plan, sera égale au moment du centre de gravité *R* où toutes les parties du système seront réputées rassemblées; c'est-à-dire qu'on aura

$M \times Cc + N \times Dd - K \times Aa - L \times Bb = K + L + M + N \times Rr.$

Or divisant chaque membre de cette égalité par la somme $K + L + M + N$ des poids qui

composent le système, on trouvera

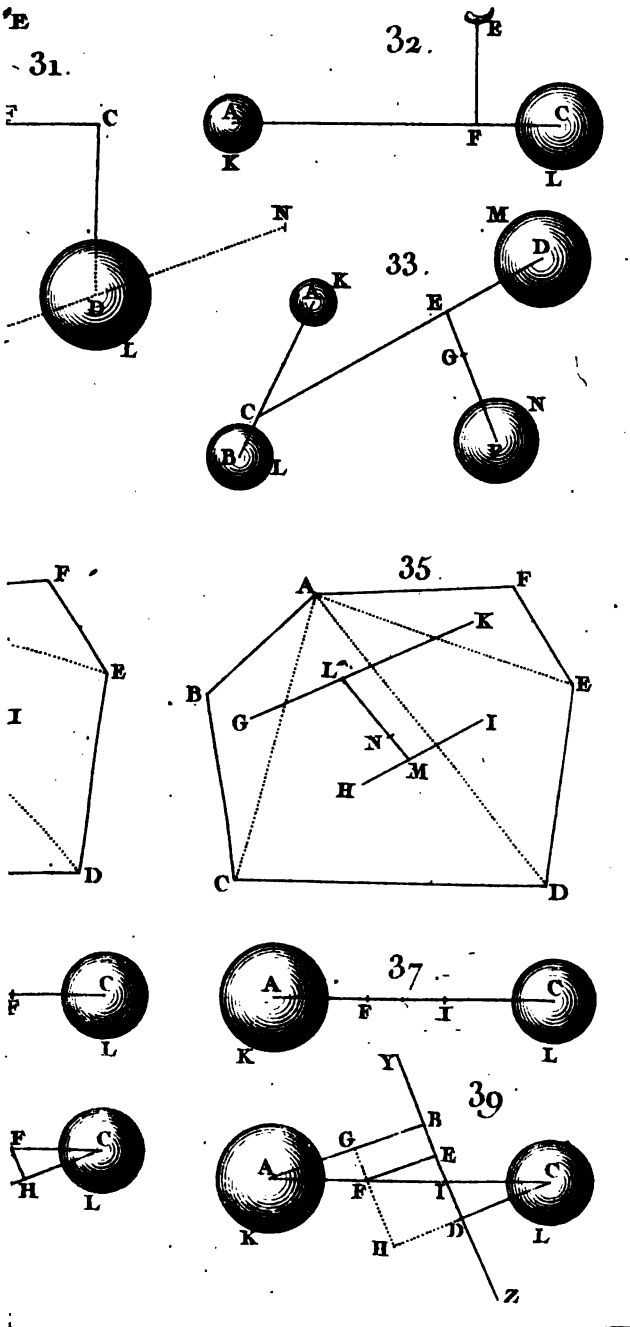
$$\frac{M \times Cc + N \times Dd - K \times Aa - L \times Bb}{K + L + M + N} = Rr.$$

Ainsi connoissant le poids de chaque corps en particulier, & la distance de son centre de gravité au plan YZ par rapport auquel on considère les momens, on aura la distance Rr du centre de gravité de leur système au même plan YZ.

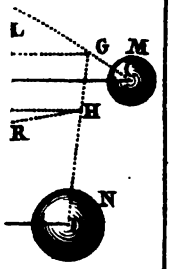
Si l'on connoît les points a, b, c, d où le plan YZ est rencontré par les droites Aa, Bb, Cc, Dd qui représentent les distances des centres de gravité particuliers des corps K, L, M, N à ce plan, & qu'ayant imaginé les poids des corps K, L, M, N appliqués à ces points a, b, c, d, l'on cherche, comme il vient d'être dit, le centre de gravité r du système de ces points ainsi chargés, ce point r sera celui où le plan YZ sera rencontré par la droite Rr qui représente la distance du centre de gravité du système des corps K, L, M, N au plan YZ.

Ainsi connoissant le point r du plan YZ, & la droite Rr comprise entre ce point & le centre de gravité du système des corps K, L, M, N, le centre de gravité de ce système sera déterminé.

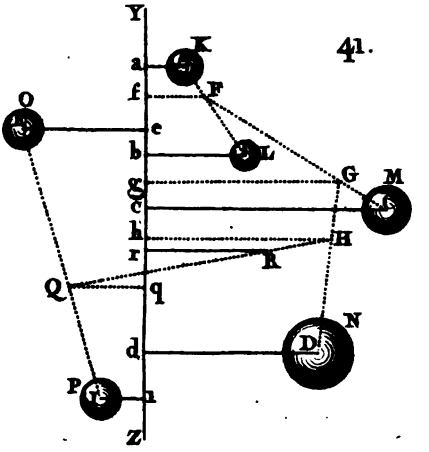
Comme la démonstration de cette opération est facile à déduire de la théorie des centres de gravité des corps situés dans un même plan, & que d'ailleurs on ne fera point usage de cette remarque dans la suite de ce traité, il est inutile d'y insister davantage.


E
31.
C
N
B
L
32.
E
A
K
F
C
L
33.
M
D
K
A
E
G
C
N
B
L
F
E
I
D
35.
A
F
K
B
L
E
G
I
N
M
H
C
D
F
C
L
37.
A
F
I
C
K
L
39.
Y
B
F
C
G
E
H
L
A
F
I
C
K
H
D
L
Z

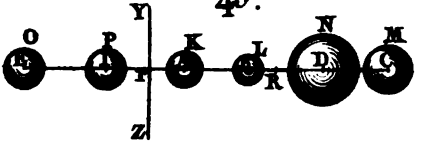
40.



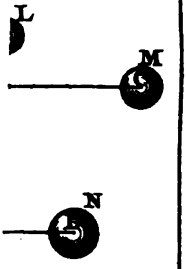
41.



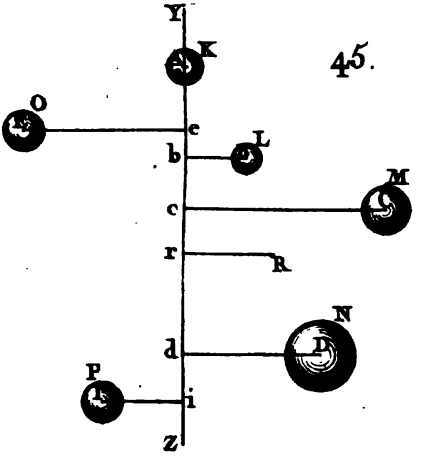
43.

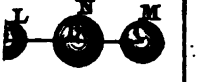


44.

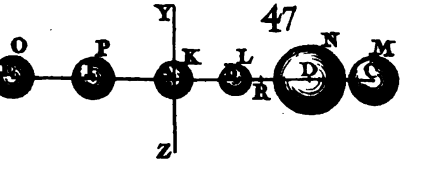


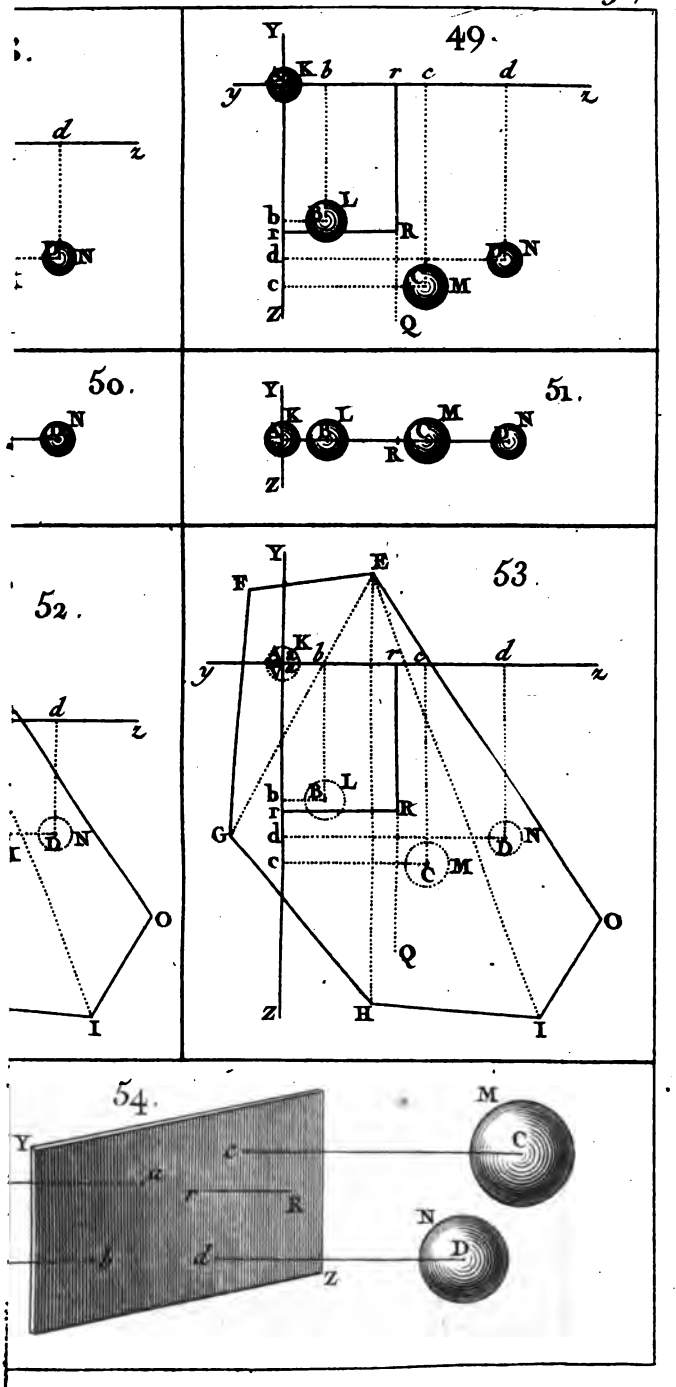
45.





47




d
z
N
49.
Y
K
b
r
c
d
y
z
L
R
N
M
Q
50.
51.
52.
O
I
53.
E
F
G
H
54.
M
C
D

CHAPITRE V.

Des momens & des centres de gravité des arcs & de différentes portions de cercles ; de ceux des parties de la ſurface, & de la ſolidité de la ſphère.

75. ON a vû dans le Chapitre II que le centre de gravité de la circonférence & de la ſurface du cercle eſt à ſon centre propre, c'eſt-à-dire, au milieu de ſon diamètre ; que celui de la ſurface & de la ſolidité de la ſphère eſt pareillement au milieu de ſon diamètre.

On a auſſi démontré dans le même chapitre *(n.° 33)* que le centre de gravité de la ſurface convexe d'un ſegment, produite par un arc AB dans ſa révolution ſur un rayon BC, ou ſur ſon ſinus verſe BE, eſt au milieu P de ce ſinus verſe qui devient la flèche du ſegment ; & que le centre de gravité d'une zone ſphérique décrite par un arc AM dans ſa révolution autour d'un rayon BC qui ne paſſe point par une extrémité de cet arc, eſt au milieu de la partie EF de ce rayon, qui devient la hauteur de la zone & qui eſt compriſe entre deux cordes AD, MN menées par les extrémités de l'arc AM perpendiculairement ſur ce rayon BC : ainſi il ne ſera point queſtion dans ce chapitre de chercher le centre de gravité de toutes ces figures. Fig. 55.

Si l'on mène un rayon CB au milieu d'un arc de cercle ABD, les deux parties AB, DB de cet arc ſeront égales, ſemblables, & ſymmétriquement placées

par rapport au rayon *CB;* ainſi le centre de gravité commun de ces deux parties, c'eſt-à-dire, celui de l'arc entier *ABD,* ſera dans le rayon *CB.*

L'aire d'un ſegment *BAEDB* ou d'un ſecteur *BACDB* étant auſſi compoſée de deux parties égales, ſemblables, & ſemblablement diſpoſées par rapport au rayon *CB* qui diviſe l'arc ou la corde de ce ſegment ou ſecteur en deux parties égales, il eſt encore évident que le centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur, eſt auſſi dans le rayon *CB* tiré par le milieu de ſon arc ou de ſa corde.

En faiſant tourner le ſecteur de cercle *ACB* autour du rayon *CB,* ce ſecteur produira dans ſon mouvement le ſolide d'un ſecteur ſphérique; & le demi-ſegment *AEB* engendrera le ſolide d'un ſegment ſphérique. Or tous ces ſolides étant compoſés de parties égales ſymmétriquement placées autour de l'axe *CB,* ils auront évidemment leurs centres de gravité dans cet axe ou rayon *CB.*

Mais pour déterminer le centre de gravité d'un arc, d'un ſegment ou d'un ſecteur de cercle ou de ſphère, ce n'eſt pas aſſez d'avoir fait voir qu'il eſt dans un rayon *CB* qui diviſe l'arc ou la corde de cette figure en deux parties égales; il reſte encore à trouver quel eſt le point de ce rayon qu'on doit regarder comme le centre de gravité, ou à chercher quelque autre ligne droite dans laquelle le même centre de gravité ſoit encore ſitué.

THEOREME.

Fig. 50. 76. *Soit un demi-cercle touché par une droite EF parallèle à ſon diamètre* AD *& terminée par deux perpendiculaires* AE, DF *aux extrémités de ce diamètre;*

en ſorte que la tangente EF *ſoit égale au diamètre. Si l'on diviſe la demi-circonférence* ABD *& la tangente* EF *en parties correſpondantes, par des droites* TL, BC, YR, ZS *quelconques perpendiculaires au diamètre* AD, *& que l'on conſidère les momens par rapport à ce diamètre, le moment de la demi-circonférence entière* ABD, *& ceux de ſes parties* AG, AB, AI, GB, GI, GK, &c. *ſeront égaux au moment de la tangente* EF, *& à ceux de ſes parties correſpondantes* ET, EB, EY, TB, TY, TZ, &c.

DÉMONSTRATION.

Imaginons que la demi-circonférence *ABD* & la tangente *EF* ſont encore diviſées en une infinité de petites parties, par des perpendiculaires telles que *TL*, *XN* menées vers le diamètre *AD*, ou vers la tangente *EF*. On va d'abord prouver qu'en conſidérant les momens par rapport au diamètre *AD*, le moment de chaque petite partie *GH* de la demi-circonférence eſt égal au moment de la petite partie correſpondante *TX* de la tangente.

L'arc *GH* étant ſuppoſé infiniment petit, peut être regardé comme une ligne droite; ainſi ſon milieu *O* doit être pris pour ſon centre de gravité. Menant par ce point *O* une droite *MOV* perpendiculaire au diamètre *AD* que l'on conſidère comme l'axe des momens, le moment du petit arc *GH* réuni à ſon centre de gravité *O*, ſera repréſenté par $GH \times OM$, & le moment de la petite droite correſpondante *TX* le ſera par $TX \times VM$; ainſi il faut d'abord démontrer que $GH \times OM = TX \times VM$.

Soit tiré le rayon *OC*, & par l'extrémité *G* du petit arc *GH*, ſoit menée vers *XN* la perpendiculaire

GQ; le petit triangle GQH aura les côtés perpendiculaires ſur ceux du triangle OMC : ainſi ces deux triangles GQH, OMC ſeront ſemblables & donneront $GH : GQ :: OC : OM$, d'où l'on tirera $GH \times OM = GQ \times OC$.

Mais $GQ = TX$, & le rayon OC ou $CB = VM$; ainſi $GQ \times OC = TX \times VM$.

Donc $GH \times OM = TX \times VM$, c'eſt-à-dire, que le moment de chaque petite partie GH de la demi-circonférence ABD eſt égal au moment de la petite partie correſpondante TX de la tangente: d'où il ſuit que

1.° La ſomme des momens de toutes les parties infiniment petites dont la demi-circonférence ABD eſt compoſée, eſt égale à la ſomme des momens de toutes les parties correſpondantes contenues dans la tangente EF, & par conſéquent le moment de la demi-circonférence ABD ou du ſyſtème de toutes ſes parties, eſt égal au moment de la tangente EF ou du ſyſtème de toutes ſes parties.

2.° Comme les parties finies AG, AB, AI, GB, GI, GK, *&c.* de la demi-circonférence, & les parties correſpondantes ET, EB, EY, TB, TY, TZ, *&c.* de la tangente EF, ſeront partagées dans un même nombre de parties infiniment petites, par le nombre infini de perpendiculaires qu'on a imaginées tirées vers le diamètre AD; la ſomme des momens de toutes les parties infiniment petites contenues dans les arcs AG, AB, AI, GB, GI, GK, *&c.* ſera égale à la ſomme des momens de toutes les parties infiniment petites contenues dans les parties correſpondantes ET, EB, EY, TB, TY, TZ, *&c.* de la tangente; & par conſéquent les momens des parties

AG, AB, AI, GB, GI, GK, &c. de la demi-circonférence ſeront égaux aux momens des parties finies correſpondantes *ET, EB, EY, TB, TY, TZ, &c.* de la tangente *EF. Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

77. Suppoſons que *P, M, N, O, Q, V, X, &c.* ſont les centres de gravité de la demi-circonférence *ABD*, & des arcs *AG, AB, AI, GB, GI, GK, &c.* & que les poids de ces arcs ſont réunis à leurs centres de gravité; ſi l'on mène des perpendiculaires *PC, Mm, Nn, Oo, Qq, VC, Xx, &c.* de ces centres de gravité vers l'axe ou diamètre *AD* par rapport auquel on conſidère les momens, les momens des arcs *ABD, AG, AB, AI, GB, GBI, GK* ſeront repréſentés par Fig. 57.

ABD × PC, AG × Mm, AB × Nn, AI × Oo, GB × Qq, GBI × VC, GK × Xx.

Le moment de la tangente *EF*, & celui de chacune de ſes parties *ET, EB, EY, TB, TY, TZ, &c.* ſeront le produit de cette tangente, & ceux de ſes parties multipliées par des perpendiculaires tirées de leurs centres de gravité ou milieux ſur le diamètre *AD*; & comme chacune de ces perpendiculaires ſera égale au rayon *BC* ou *AC*, les momens des lignes *EF, ET, EB, EY, TB, TY, TZ* ſeront repréſentés par

EF × BC, ET × BC, EB × BC, EY × BC, TB × BC, TY × BC, TZ × BC,

ou par

AD × AC, AL × AC, AC × AC, AR × AC, LC × AC, LR × AC, LS × AC.

Or puiſque *(n.° 76)* le moment de la demi-circonférence *ABD*, & ceux de ſes parties *AG, AB, AI,*

GB, GI, GK, &c. ſont égaux à celui de la tangente *EF*, & à ceux de ſes parties correſpondantes *ET, EB, EY, TB, TY, TZ, &c.* on aura

$$\left.\begin{array}{l} ABD \times PC = AD \times AC = 2\overline{AC}^2 \\ AG \times Mm = AL \times AC \\ AB \times Nn = AC \times AC \quad \text{ou } \overline{AC}^2 \\ AI \times Oo = AR \times AC \\ GB \times Qq = LC \times AC \\ GI \times VC = LR \times AC \\ GK \times Xx = LS \times AC, \end{array}\right\} \text{ \& par conſéquent } \left\{\begin{array}{l} PC = \frac{AD \times AC}{ABD} = \frac{2\overline{AC}^2}{ABD} = \frac{\overline{AC}^2}{AB} \\ Mm = \frac{AL \times AC}{AG} \\ Nn = \frac{\overline{AC}^2}{AB} \\ Oo = \frac{AR \times AC}{AI} \\ Qq = \frac{LC \times AC}{GB} \\ VC = \frac{LR \times AC}{GBI} = \frac{GI \times AC}{GBI} \\ Xx = \frac{LS \times AC}{GK} \end{array}\right.$$

C'eſt-à-dire que 1.° la perpendiculaire *PC* ou *Nn* tirée du centre de gravité de la moitié ou du quart de la circonférence ſur le diamètre *AD* ou ſur le rayon *AC* qui termine cet arc, eſt égale au quarré du rayon diviſé par le quart de la circonférence.

2.° Les perpendiculaires *Mm, Nn, Oo* menées des centres de gravité des arcs *AG, AB, AI* ſur le rayon *AC* qui paſſe par une extrémité *A* de ces arcs, ſont égales aux produits faits des ſinus verſes *AL, AC, AR* de ces arcs & du rayon *AC*, diviſés par les longueurs des mêmes arcs.

3.° Les perpendiculaires *Qq, VC, Xx* tirées par les centres de gravité des arcs *GB, GI, GK* vers un diamètre quelconque *AD*, ſe trouvent en multipliant le rayon *AC* par les parties *LC, LR, LS* de ce diamètre, compriſes entre les perpendiculaires tirées des extrémités de ces arcs ſur le même diamètre, &

diviſant enſuite ces produits par les longueurs des arcs GB, GI, GK.

4.° Et par conſéquent la diſtance VC du centre de gravité d'un arc GBI au centre du cercle, ou la perpendiculaire VC tirée du centre de gravité V de cet arc ſur un diamètre AD parallèle à la corde GI de cet arc, eſt égale au produit de ſa corde GI & du rayon AC, diviſé par la longueur GBI du même arc.

5.° Enfin la perpendiculaire Qq menée du centre de gravité Q d'un arc GB ſur un rayon AD perpendiculaire à celui BC qui paſſe par une extrémité B de cet arc, eſt égale au produit du ſinus LC de cet arc GB & du rayon AC, diviſé par la longueur du même arc.

COROLLAIRE II.

78. On a démontré *(Géom. n.° 368)* que les cordes AG, AB, AI, *&c.* qui partent de l'extrémité d'un diamètre AD, ſont moyennes proportionnelles entre ce diamètre & ſes parties AL, AC, AR, *&c.* compriſes entre l'extrémité A d'où partent toutes ces cordes, & les perpendiculaires GL, BC, IR, *&c.* au diamètre AB par leſquelles toutes les cordes AG, AB, AI, *&c.* ſont terminées. Fig. 58.

On aura donc $AL \times AD = \overline{AG}^2$, $AC \times AD = \overline{AB}^2$, $AR \times AD = \overline{AI}^2$

ou.... $AL \times AC = \frac{1}{2}\overline{AG}^2$, $AC \times AC = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$, $AR \times AC = \frac{1}{2}\overline{AI}^2$

Ainſi puiſque les momens des arcs AFG, AGB, ABI

ſont repréſentés par $AFG \times Mm$, $AGB \times Nn$, $ABI \times Oo$,

ou par les produits $AL \times AC$, $AC \times AC$, $AR \times AC$;

ils ſeront auſſi repréſentés par $\frac{1}{2}\overline{AG}^2$; $\frac{1}{2}\overline{AB}^2$; $\frac{1}{2}\overline{AI}^2$

c'eſt-à-dire qu'on aura $\begin{cases} AFG \times Mm = \frac{1}{2}\overline{AG}^2 \\ AGB \times Nn = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 \\ ABI \times Oo = \frac{1}{2}\overline{AI}^2 \end{cases}$ & par conſéquent $\begin{cases} Mm = \frac{\overline{AG}^2}{2AFG} \\ Nn = \frac{\overline{AB}^2}{2AGB} \\ Oo = \frac{\overline{AI}^2}{2ABI} \end{cases}$

Ainſi la perpendiculaire tirée du centre de gravité d'un arc ſur le rayon qui paſſe par une extrémité du même arc, eſt égale au quarré de la corde de cet arc, diviſé par le double de la longueur du même arc.

COROLLAIRE III.

Fig. 59 & 60. 79. Si la perpendiculaire Qq eſt tirée du centre de gravité Q d'un arc GIK ſur un diamètre AD qui ne paſſe par aucune des deux extrémités de cet arc, on aura la valeur de cette perpendiculaire Qq, en multipliant la corde GK de l'arc par une perpendiculaire IR menée du milieu de cet arc ſur le diamètre AD, & en diviſant le produit par la longueur du même arc; c'eſt-à-dire qu'on aura $Qq = \frac{GK \times IR}{GIK}$.

Car ſi par le milieu de l'arc GIK l'on tire le rayon IC, & qu'après avoir mené par les extrémités de cet arc des perpendiculaires GL, KS ſur le diamètre AD, l'on tire encore par l'extrémité G du même arc une perpendiculaire GH ſur KS, le triangle GHK aura les côtés perpendiculaires ſur ceux du triangle IRC; ainſi ces deux triangles GHK, IRC ſeront ſemblables & donneront $GH : GK :: IR : IC$, & par conſéquent $GH \times IC$ ou $LS \times AC = GK \times IR$. Mais on a trouvé (n° 77) $GIK \times Qq = LS \times AC$. On aura donc auſſi $GIK \times Qq = GK \times IR$, & $Qq = \frac{GK \times IR}{GIK}$.

On doit remarquer que GIK × *Qq représente le moment de l'arc* GIK *par rapport au diamètre* AD, *& que ce moment eſt égal au produit* GK × IR *fait de la corde de l'arc multipliée par la perpendiculaire tirée du milieu de cet arc ſur le diamètre par rapport auquel on conſidère le moment.*

REMARQUE.

80. Tout ce qu'on vient de démontrer au ſujet des momens des arcs relativement à un diamètre *AD*, & de la diſtance du centre de gravité de ces arcs à ce diamètre, eſt vrai, non ſeulement lorſque ces arcs ne ſurpaſſent point la demi-circonférence, & dans le cas où ils ſont entièrement d'un côté du diamètre *AD*, mais encore dans le cas où ces arcs ſont diviſés par le diamètre relativement auquel on conſidère les momens, ſoit qu'ils ſurpaſſent ou qu'ils ne ſurpaſſent point la demi-circonférence. Cette remarque ſera évidente, ſi l'on fait attention qu'en diviſant la circonférence d'un cercle en deux arcs inégaux quelconques *AFG*. *AEG*, ces deux arcs auront des momens égaux relativement à chaque diamètre du cercle; ce qui eſt facile à prouver. Fig. 61.

On a démontré *(n.° 63)* que les momens de deux lignes regardées comme des poids proportionnels à l'étendue de ces lignes, ſont égaux quand ils ſont conſidérés relativement au centre de gravité de leur ſyſtème, ou par rapport à un axe qui paſſe par ce centre de gravité. Or chaque diamètre du cercle paſſe par le centre de gravité de la circonférence, ou du ſyſtème des deux arcs quelconques dans leſquels elle eſt diviſée. Donc lorſque la circonférence d'un cercle ſera diviſée en deux arcs inégaux quelconques *AFG*,

AEG, les momens de ces deux arcs ſeront égaux par rapport à chaque diamètre du cercle.

Fig. 61. 1.° Si de deux points quelconques *G*, *K* de la demi-circonférence, l'on mène des perpendiculaires *GL*, *KS* ſur un diamètre *AD*; on a vû *(n.° 77)* que les momens des arcs *AFG*, *GIK* ſeront égaux aux produits des parties correſpondantes *AL*, *LS* du diamètre *AD*, multipliées par le rayon *CA*; c'eſt-à-dire que (en ſuppoſant que les points *M*, *X* ſont les centres de gravité des arcs *AFG*, *GIK*, & qu'on a tiré les perpendiculaires *Mm*, *Xx* ſur le diamètre *AD)* l'on aura $AFG \times Mm = AL \times AC$, & $GIK \times Xx = LS \times AC$.

Donc ſi l'on ſuppoſe que les points *N*, *Y* ſont les centres de gravité des autres parties *AEG*, *GZK* de la circonférence, & que l'on mène des perpendiculaires *Nn*, *Yy* vers le même diamètre *AD*, l'on aura auſſi $AEG \times Nn = AL \times AC$, & $GZK \times Yy = LS \times AC$; & par conſéquent $Nn = \frac{AL \times AC}{AEG}$, & $Yy = \frac{LS \times AC}{GZK}$; c'eſt-à-dire que les momens des arcs *AEG*, *GZK* plus grands que la demi-circonférence, ſont égaux aux produits faits du rayon multiplié par les parties *AL*, *LS* du diamètre par rapport auquel on conſidère les momens, compriſes entre des perpendiculaires tirées des extrémités de ces arcs ſur ce diamètre, & que les perpendiculaires *Nn*, *Yy* tirées des centres de gravité *N*, *Y* de ces arcs ſur le diamètre *AD*, ſont égales aux mêmes produits du rayon multiplié par les parties *AL*, *LS* du diamètre *AD*, diviſés par les longueurs de ces arcs. On avoit démontré cette propoſition pour les arcs moindres que la demi-circonférence & qui étoient entièrement d'un côté du diamètre.

2.° On

2.° On a encore démontré *(n.° 78)* que le moment d'un arc AFG qui part de l'extrémité du diamètre AD par rapport auquel on considère les momens, est égal à la moitié du quarré de sa corde AG; c'est-à-dire, que $AFG \times Mm = \frac{1}{2}\overline{AG}^2$. Ainsi puisque les momens des arcs AFG, AEG considérés par rapport à un même diamètre AD sont égaux, l'on aura aussi $AEG \times Nn = \frac{1}{2}\overline{AG}^2$, & par conséquent $Nn = \frac{\overline{AG}^2}{2\,AEG}$,

C'est-à-dire que le moment d'un arc plus grand que la demi-circonférence qui part d'une extrémité du diamètre AD relativement auquel on considère les momens, est égal à la moitié du quarré de sa corde; & que la perpendiculaire Nn menée du centre de gravité de cet arc sur le même diamètre, est égale au quarré de la corde de cet arc, divisé par le double de la longueur du même arc. On avoit démontré cette proposition pour les arcs moindres que la demi-circonférence.

3.° On a encore démontré que le moment d'un arc GIK relativement au diamètre AD qui ne passe par aucune extrémité de cet arc, est égal au produit de sa corde GK multipliée par la perpendiculaire IR menée du milieu de cet arc sur le diamètre AD; c'est-à-dire que si le point X est le centre de gravité de l'arc GIK, l'on aura $GIK \times Xx = GK \times IR$. On aura donc aussi $GZK \times Yy = GK \times IR = GK \times ZT$, & par conséquent $Yy = \frac{GK \times IR}{GZK} = \frac{GK \times ZT}{GZK}$,

C'est-à-dire que le moment d'un arc GZK plus grand que la demi-circonférence, est égal au produit fait de la corde de cet arc & de la perpendiculaire

menée du milieu du même arc ſur le diamètre du moment; & que la perpendiculaire Yy tirée du centre de gravité de cet arc ſur le même diamètre AD, eſt égale au même produit de la corde GK & de la perpendiculaire IR ou ZT, diviſé par la longueur de l'arc.

Fig. 62. 4.° On a vû *(n.° 64)* que deux poids ou deux arcs AK, AG qu'on peut regarder comme deux poids proportionnels à l'étendue de ces arcs, étant placés des deux côtés d'un axe AD par rapport auquel on conſidère les momens, la différence des momens particuliers de ces deux arcs eſt égale au moment de leur ſyſtème ou de l'arc entier GAK.

Or *(n.° 77)* ſi des extrémités K, G des deux arcs AK, AG, l'on mène des perpendiculaires KS, GL ſur l'axe ou diamètre AD, le moment de l'arc AK ſera repréſenté par $AS \times AC$; celui de l'arc AG ſera exprimé par $AL \times AC$; & la différence des momens des deux arcs AK, AG ſera repréſentée par $AS \times AC - AL \times AC = (AS - AL) \times AC = LS \times AC$.

Ainſi en ſuppoſant que le point X eſt le centre de gravité de l'arc GAK, & que le moment de cet arc eſt par conſéquent exprimé par $GAK \times Xx$, on aura $GAK \times Xx = LS \times AC$, & $Xx = \frac{LS \times AC}{GAK}$.

C'eſt-à-dire que le moment d'un arc GAK par rapport au diamètre AD qui coupe cet arc, eſt égal au produit du rayon AC & de la partie LS du diamètre compriſe entre les perpendiculaires GL, KS tirées de l'extrémité de l'arc GAK ſur le diamètre; & que la perpendiculaire Xx tirée du centre de gravité X de l'arc GAK ſur le diamètre AD qui coupe cet arc, eſt égale au produit du rayon AC &

de la partie LS du diamètre, diviſé par la longueur de l'arc GAK.

5.° Si par le milieu I de l'arc GAK l'on tire un rayon IC & une perpendiculaire IR ſur le diamètre AD, & que par l'extrémité G du même arc on mène une perpendiculaire GH ſur le prolongement de la droite KS tirée perpendiculairement au diamètre AD, les côtés du triangle GHK ſeront perpendiculaires ſur ceux du triangle IRC : ainſi ces deux triangles GHK, IRC ſeront ſemblables, & donneront GH ou $LS : GK :: IR : IC$ ou AC; d'où l'on tirera $LS \times AC = GK \times IR$: & comme on vient de trouver $GAK \times Xx = LS \times AC$, on aura auſſi $GAK \times Xx = GK \times IR$, & $Xx = \frac{GK \times IR}{GAK}$. Fig. 62.

C'eſt-à-dire que le moment d'un arc GAK coupé en deux parties quelconques AK, AG par un diamètre AD conſidéré comme axe de ce moment, eſt égal au produit de ſa corde GK & d'une perpendiculaire IR tirée du milieu de cet arc ſur le diamètre AD; & que la perpendiculaire Xx tirée du centre de gravité X de l'arc GAK ſur le diamètre AD, eſt égale au même produit diviſé par la longueur de cet arc.

6.° Comme le moment de l'arc GIK & celui de l'arc GZK ſont égaux, le moment de l'arc GZK ſera auſſi repréſenté par $LS \times AC$, ou par $KG \times IR = KG \times ZT$. Ainſi ſuppoſant que Y eſt le centre de gravité de l'arc GZK, & tirant Yy perpendiculairement ſur le diamètre AD, l'on aura $GZK \times Yy = LS \times AC$, & $GZK \times Yy = GK \times ZT$; d'où l'on tirera $Yy = \frac{LS \times AC}{GZK}$, & $Yy = \frac{GK \times ZT}{GZK}$,

Donc en général le moment d'un arc plus petit ou plus grand que la demi-circonférence, eſt dans tous les cas repréſenté par le produit du rayon & de la partie du diamètre par rapport auquel on conſidère ce moment, compriſe entre deux perpendiculaires tirées des extrémités de cet arc ſur ce diamètre. Le moment du même arc eſt encore égal au produit de la corde de cet arc & de la perpendiculaire tirée du milieu du même arc ſur le diamètre que l'on regarde comme l'axe du moment.

Enfin la perpendiculaire tirée du centre de gravité d'un arc quelconque ſur un diamètre, eſt dans tous les cas égale au produit qui lui ſert de moment par rapport à ce diamètre, diviſé par la longueur de cet arc.

PROBLEME.

81. *Trouver le centre de gravité d'un arc dont on connoît le rayon & le nombre de degrés.*

SOLUTION.

Comme le principal objet de ce Problème eſt de faire l'application des principes qu'on a établis depuis le commencement de ce Chapitre, on ſe contentera de le réſoudre dans quelques exemples où l'on ſuppoſera que le diamètre eſt à la circonférence, ou que le demi-diamètre eſt à la demi-circonférence, comme 7 eſt à 22 ; en ſorte que dans un cercle dont AC ſera le rayon, l'on prendra $\frac{22}{7}AC$ pour la demi-circonférence, $\frac{11}{7}AC$ pour le quart de la circonférence, $\frac{44}{21}AC$ pour le tiers de la circonférence, $\frac{22}{21}AC$ pour la ſixième partie de la circonférence, & ainſi des autres arcs.

I.

82. *On demande le centre de gravité* P *d'une demi-circonférence* A B D. Fig. 56.

Ayant diviſé la demi-circonférence ABD en deux parties égales par un rayon CB, le centre de gravité P qu'on demande ſera dans ce rayon *(n.° 75)*. Voici comme on le déterminera.

On a trouvé *(n.° 77)* $CP = \frac{\overline{AC}^2}{AB}$. Mais le quart de circonférence $AB = \frac{11}{7} AC$. On aura donc $CP = \frac{\overline{AC}^2}{\frac{11}{7} AC} = \frac{7}{11} AC$. C'eſt-à-dire qu'en prenant ſur le rayon CB qui diviſe la demi-circonférence en deux parties égales, une partie CP égale aux $\frac{7}{11}$ du rayon, le point P ſera le centre de gravité demandé.

II.

83. *On demande le centre de gravité du quart de circonférence* G I K. Fig. 60.

On peut déterminer ce centre de gravité de deux manières principales.

1.° Ayant diviſé le quart de circonférence GIK en deux parties égales par un rayon CI, le centre de gravité Q qu'on demande ſera placé dans ce rayon, & l'on aura *(n.° 77)* $CQ = \frac{GK \times AC}{GIK}$. Mais *(n.° 81)* $GIK = \frac{11}{7} AC$. On aura donc $CQ = \frac{GK \times AC}{\frac{11}{7} AC} = \frac{7}{11} GK$. C'eſt-à-dire que le centre de gravité Q d'un arc GIK de 90 degrés eſt éloigné du centre C du cercle, d'une quantité égale aux $\frac{7}{11}$ de la corde de cet arc.

Fig. 58. 2.° On peut encore trouver le centre de gravité N d'un arc AGB de 90 degrés, en déterminant les distances Nn, NP de ce centre de gravité aux deux rayons AC, BC qui terminent cet arc. Car *(n.° 77)* ayant trouvé $Nn = \frac{\overline{AC}^2}{AGB}$, & *(n.° 81)* $AGB = \frac{11}{7} AC$, on aura $Nn = \frac{\overline{AC}^2}{\frac{11}{7} AC} = \frac{7}{11} AC$. C'est-à-dire que la distance Nn du centre de gravité d'un arc de 90 degrés au rayon AC qui termine cet arc, est égale à sept fois la onzième partie du rayon : & comme il est évident que ce centre de gravité est éloigné du rayon BC de la même quantité, ou que $NP = Cn$, il est clair que si l'on prend sur le rayon AC une partie $Cn = \frac{7}{11} AC$, & que par le point n on élève sur ce rayon une perpendiculaire $nN = \frac{7}{11} AC$, l'extrémité N de cette perpendiculaire sera le centre de gravité qu'on demande.

III.

Fig. 57. 84. *On demande le centre de gravité d'un arc de 60 degrés.*

On va déterminer le centre de gravité qu'on demande, de trois manières.

1.° Si l'arc GBI qu'on suppose de 60 degrés, & dont la corde GI est par conséquent égale au rayon AC, est divisé en deux parties égales par un rayon BC; le centre de gravité V de cet arc sera placé dans le rayon BC, de manière que l'on aura *(n.° 77)* $VC = \frac{GI \times AC}{GBI}$. Mais l'arc GBI étant de 60 degrés, on aura *(n.° 81)* $GBI = \frac{22}{21} AC$, & $GI = AC$.

On aura donc $VC = \frac{AC \times AC}{\frac{22}{21} AC} = \frac{21}{22} AC$. C'eſt-à-dire que le centre de gravité d'un arc GBI de 60 degrés eſt éloigné du centre du cercle d'une quantité égale à vingt-une fois la vingt-deuxième partie du rayon, ce qui fixe la poſition du centre de gravité V demandé.

2.° On peut déterminer la ſituation du centre de gravité M d'un arc AFG de 60 degrés, dans le rayon CF qui diviſe cet arc en deux parties égales, en cherchant la diſtance Mm de ce centre de gravité au rayon CA qui paſſe par une extrémité de cet arc. Fig. 58.

On a trouvé *(n.° 78)* $Mm = \frac{\overline{AG}^2}{2\,AFG}$. Mais dans le cas préſent l'arc $AFG = \frac{22}{21} AC$, & la corde $AG = AC$. On aura donc $Mm = \frac{\overline{AC}^2}{2 \times \frac{22}{21} AC} = \frac{21}{44} AC$. Ainſi prenant ſur le rayon CB perpendiculaire à celui qui paſſe par l'extrémité de l'arc propoſé, une partie $CY = \frac{21}{44} AC$, & menant par le point Y une parallèle YM au rayon AC, le point M où cette parallèle rencontrera le rayon CF qui diviſe l'arc AFG en deux parties égales, ſera le centre de gravité de l'arc AFG.

3.° On trouvera encore le centre de gravité Q d'un arc GIB de 60 degrés dans le rayon CI qui diviſe cet arc en deux parties égales, en cherchant la diſtance Qq de ce centre au rayon AC perpendiculaire à celui BC qui paſſe par une extrémité de l'arc GIB. Fig. 59.

On a trouvé *(n.° 79)* $Qq = \frac{GK \times IR}{GIK}$ ou $\frac{GB \times IR}{GIB}$. Mais puiſque l'arc GIB eſt de 60 degrés, on aura $GIB = \frac{22}{21} AC$; $GB = AC$. On aura donc

$Qq = \frac{AC \times IR}{\frac{33}{21} AC} = \frac{21}{22} IR$. Ainſi prenant ſur le rayon CB une partie $CY = \frac{21}{22} IR$, c'eſt-à-dire, égale à vingt-une fois la vingt-deuxième partie de IR coſinus de 30 degrés relativement au rayon CA, & menant YQ parallèle à CA; le point Q où cette parallèle rencontrera le rayon CI qui diviſe l'arc GIB en deux parties égales, ſera le centre de gravité de cet arc.

Si l'on vouloit avoir la longueur de la perpendiculaire Qq en parties du rayon AC, on remarqueroit que l'arc AI eſt de 60 degrés, & que la perpendiculaire IR menée ſur le rayon AC diviſe par conſéquent ce rayon en deux parties égales. Ainſi l'on aura

IR ou $\sqrt{\overline{IC}^2 - \overline{CR}^2} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \frac{1}{4}\overline{AC}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\overline{AC}^2} = AC \times \sqrt{\frac{3}{4}}$;

en ſorte qu'au lieu de $Qq = \frac{21}{22} IR$, on auroit $Qq = \frac{21}{22} AC \times \sqrt{\frac{3}{4}}$: & ſi l'on prenoit $\frac{26}{15}$ pour $\sqrt{3}$ qui en diffère très-peu, on trouveroit $Qq = \frac{21}{22} AC \times \frac{26}{30}$ ou $Qq = \frac{91}{110} AC$.

Fig. 59. 4.° Enfin ſi l'on a trouvé, comme dans les deux articles précédens, les deux diſtances du centre de gravité Q aux deux rayons BC, AC qui comprennent un angle droit, & dont l'un paſſe par une extrémité de l'arc propoſé GB; on déterminera encore le centre de gravité G de cet arc, en prenant ſur le rayon AC une partie Cq égale à la diſtance du centre de gravité Q à l'autre rayon BC, & en élevant par le point q ſur ce rayon AC une perpendiculaire qQ égale à la diſtance qui doit être entre le même centre de gravité & le rayon AC.

THEOREME.

Fig. 63. 85. *Le centre de gravité* P *d'un ſecteur de cercle*

MCN *eſt placé dans le rayon* CO *qui diviſe ce ſecteur en deux parties égales, de manière que* $CP = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MON}$. *Et ſi l'on abaiſſe une perpendiculaire* PR *ſur le rayon latéral* CN, *on aura* $PR = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON}$.

DÉMONSTRATION.

On a prouvé *(n.° 75)* que le centre de gravité *P* d'un ſecteur de cercle *MCN* eſt dans le rayon *CO* qui diviſe ce ſecteur en deux parties égales; il reſte donc ſeulement à démontrer que $CP = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MON}$, & $PR = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON}$.

Imaginons le ſecteur *MCN* partagé par des rayons en une infinité de petits ſecteurs égaux. Ces petits ſecteurs pourront être regardés comme des triangles qui ayant leurs ſommets réunis au centre *C*, & leurs baſes dans l'arc *MON*, auront tous le rayon du ſecteur pour hauteur. Chacun de ces petits triangles, par exemple, le petit triangle *MCL* aura ſon centre de gravité *K* dans le rayon *CI* qui partagera ſa baſe en deux parties égales, & l'on trouvera *(n.° 35)* $CK = \frac{2}{3}\,CI$; en ſorte que ſi du point *C* comme centre, & d'un rayon *CK* ou $CB = \frac{2}{3}\,CI$ ou $\frac{2}{3}\,CO$, l'on décrit un arc *ABD*, cet arc contiendra les centres de gravité particuliers de tous les petits triangles dans leſquels le ſecteur *MCN* aura été partagé.

Comme tous les petits triangles dans leſquels on imagine que le ſecteur *MCN* eſt partagé, ſont ſuppoſés égaux, ils contiendront des parties égales de l'arc

ABD; ainſi les centres de gravité particuliers K, K, K, *&c.* où l'on doit ſuppoſer que les poids égaux de tous ces petits triangles ſont réunis, ſeront uniformément diſtribués ſur l'arc ABD.

On pourra donc conſidérer l'arc ABD comme la ſeule choſe peſante dans le ſecteur MCN, & regarder le centre de gravité P de cet arc uniformément chargé, comme le centre de gravité de ce ſecteur.

Les deux arcs concentriques ABD, MON étant ſemblables, leurs centres de gravité P, Q ſeront ſemblablement placés dans leurs rayons CB, CO qui les diviſent en deux parties égales, & par rapport à leurs rayons latéraux CD, CN; c'eſt-à-dire que l'on aura $CP : CQ :: CB : CO$: & ſi l'on tire les perpendiculaires PR, QS ſur les rayons latéraux CD, CN, on aura auſſi $PR : QS :: CD : CN :: CB : CO$. Or puiſque l'on a fait $CB = \frac{2}{3} CO$, on aura auſſi $CP = \frac{2}{3} CQ$, & $PR = \frac{2}{3} QS$.

Mais *(n.° 77)* $CQ = \frac{MN \times CO}{MON}$,

& *(n.° 78)* $QS = \frac{\overline{MN}^2}{2\,MON}$.

Donc on aura $CP = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MON}$,

& $PR = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 63. **86.** Donc 1.° le moment d'un ſecteur MCN par rapport à ſon centre C, eſt égal à $\frac{1}{3} MN \times \overline{CO}^2$, c'eſt-à-dire, au tiers du ſolide fait de ſa corde multipliée par le quarré de ſon rayon CO.

2.° Le moment du même ſecteur relativement à ſon rayon latéral CN, eſt égal à $\frac{1}{6}\overline{MN}^2 \times CO$, c'eſt-à-dire, à la ſixième partie du ſolide fait du quarré de ſa corde multipliée par ſon rayon.

Car pour avoir le moment du ſecteur MCN relativement à ſon centre C, & par rapport à ſon rayon latéral CN, il faut multiplier l'aire de ce ſecteur, ſavoir, $\frac{1}{2}MON \times CO$, par les diſtances CP & PR, ou $\frac{2}{3}\frac{MN \times CO}{MON}$ & $\frac{\overline{MN}^3}{3\,MON}$ du centre de gravité de ce ſecteur à ſon centre C & à ſon rayon latéral CN; ce qui produira pour ces deux momens

$$\frac{1}{2}MON \times CO \times \frac{2}{3}\frac{MN \times CO}{MON}, \text{ \& } \frac{1}{2}MON \times CO \times \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON},$$

qu'on réduira aiſément à $\frac{1}{3}MN \times \overline{CO}^2$, & $\frac{1}{6}\overline{MN}^2 \times CO$.

COROLLAIRE II.

87. On a démontré *(n.° 63)* que les momens de deux ſurfaces regardées comme des poids proportionnels à leurs étendues, ſont égaux quand on les conſidère par rapport au centre de gravité de leur ſyſtème, ou par rapport à un axe qui paſſe par ce centre de gravité. Or le centre C du cercle eſt le centre de gravité du cercle entier, ou du ſyſtème des deux ſecteurs $OMCNO$, $EMCNE$ qui compoſent le cercle; ainſi les momens des deux ſecteurs $OMCNO$, $EMCNE$ conſidérés par rapport au centre C ou relativement au diamètre NH, ſont égaux. Fig. 63.

Mais on vient de prouver que le moment du ſecteur $OMCNO$ conſidéré par rapport au centre C, eſt égal à $\frac{1}{3}MN \times \overline{CO}^2$, & que le moment du même

ſecteur relativement au rayon latéral CN, ou par rapport au diamètre NH, eſt égal à $\frac{1}{6} \overline{MN}^2 \times CO$.

Donc, en ſuppoſant que le point T eſt le centre de gravité du ſecteur $EMCNE$, que TV eſt perpendiculaire ſur le diamètre NCH, & que les produits $EMCNE \times CT$, $EMCNE \times TV$ ſont par conſéquent les momens du ſecteur $EMCNE$ par rapport au centre C & relativement au diamètre NCH, on aura $EMCNE \times CT = \frac{1}{3} MN \times \overline{CO}^2$, & $EMCNE \times TV = \frac{1}{6} \overline{MN}^2 \times CO$.

Or le ſecteur $EMCNE = \frac{1}{2} MEN \times CO$. Ainſi en diviſant par cette égalité les deux momens qu'on vient de trouver pour le ſecteur $EMCNE$, l'on aura $CT = \frac{\frac{1}{3} MN \times \overline{CO}^2}{\frac{1}{2} MEN \times CO}$, & $TV = \frac{\frac{1}{6} \overline{MN}^2 \times CO}{\frac{1}{2} MEN \times CO}$, ou $CT = \frac{2\, MN \times CO}{3\, MEN}$, & $TV = \frac{\overline{MN}^2}{3\, MEN}$.

C'eſt-à-dire que dans un ſecteur $EMCNE$ plus grand que le demi-cercle, ainſi que dans un ſecteur $OMCNO$ moindre que le demi-cercle, la diſtance du centre de gravité au centre du cercle, eſt égale aux deux tiers du produit de la corde & du rayon, diviſé par la longueur de l'arc; & que la diſtance du même centre de gravité à un rayon latéral du ſecteur ou à ſon prolongement, eſt égale au tiers du quarré de la corde, diviſé par la longueur de l'arc.

COROLLAIRE III.

Fig. 63. 88. En prenant, comme on a déjà fait, $\frac{22}{7} EO$ pour la circonférence, $\frac{22}{7} CO$ pour la demi-circonférence, $\frac{11}{7} CO$ pour le quart de circonférence,

$\frac{22}{21} CO$ pour la longueur d'un arc de 60 degrés, & ainſi des autres :

Si l'arc MON eſt de 90 degrés, c'eſt-à-dire, ſi $MON = \frac{11}{7} CO$, ou $MEN = \frac{33}{7} CO$;

au lieu d'avoir
$$\left\{\begin{array}{l} CP = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MON} \\ PR = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON} \\ CT = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MEN} \\ TV = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MEN} \end{array}\right\} \text{ on aura } \left\{\begin{array}{l} CP = \frac{2\,MN \times CO}{\frac{33}{7} CO} = \frac{14}{33} MN \\ PR = \frac{\overline{MN}^2}{\frac{33}{7} CO} = \frac{2\,\overline{CO}^2}{\frac{33}{7} CO} = \frac{14}{33} CO. \\ CT = \frac{2\,MN \times CO}{\frac{99}{7} CO} = \frac{14}{99} MN \\ TV = \frac{\overline{MN}^2}{\frac{99}{7} CO} = \frac{2\,\overline{CO}^2}{\frac{99}{7} CO} = \frac{14}{99} CO. \end{array}\right.$$

Si le ſecteur $OMCNO$ devient un demi-cercle $MHNM$, c'eſt-à-dire, ſi l'arc MON devient une demi-circonférence, ou égal à $\frac{22}{7} CO$, ſa corde MN deviendra égale au diamètre $NH = 2\,CO$; & ſuppoſant que le point G pris ſur le rayon CM qui diviſe le demi-cercle en deux parties égales, eſt le centre de gravité de ce demi-cercle, au lieu des équations $CP = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MON}$, $PR = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON}$, on trouvera d'abord $CG = \frac{4\,CO \times CO}{3\,NMH}$; & mettant $\frac{22}{7} CO$ pour NMH, on aura $CG = \frac{4\,CO \times CO}{\frac{66}{7} CO} = \frac{14}{33} CO$.

C'eſt-à-dire que le centre de gravité de la ſurface d'un demi-cercle eſt éloigné du centre, d'une quantité égale à quatorze fois la trente-troiſième partie du rayon.

Si le ſecteur $OMCNO$ n'étoit que la ſixième partie de ſon cercle, c'eſt-à-dire, ſi l'arc MON étoit de 60 degrés, on auroit $MON = \frac{22}{21} CO$, & $MN = CO$;

ainſi au lieu de $CP = \frac{2\,MN \times CO}{3\,MON}$, & $PR = \frac{\overline{MN}^2}{3\,MON}$, on auroit $CP = \frac{2\,CO \times CO}{\frac{66}{21}\,CO} = \frac{42}{66}\,CO = \frac{7}{11}\,CO$, & $PR = \frac{\overline{CO}^2}{\frac{66}{21}\,CO} = \frac{7}{22}\,CO$. Et ainſi des autres ſecteurs.

THEOREME.

89. *La diſtance* CQ *du centre de gravité* Q *d'un ſegment de cercle* OMDNO *au centre* C *du cercle, eſt égale à deux fois le tiers du cube de la moitié de la corde de ce ſegment, diviſé par l'aire du même ſegment; c'eſt-à-dire que* $CQ = \frac{2\,\overline{MD}^3}{3\,OMDNO}$.

Fig. 64 & 65.

DÉMONSTRATION.

Suppoſons que les trois points *P, V, Q* pris dans le rayon *CO* qui diviſe le ſecteur *OMCNO*, le ſegment *OMDNO*, & le triangle *CMDNC* en deux parties égales, ſont les centres de gravité de ce ſecteur, de ce ſegment & de ce triangle.

Si l'on conſidère les momens des ſurfaces de ces trois figures relativement au centre *C*, ou par rapport à un diamètre perpendiculaire au rayon *CO*, $\frac{1}{3}\,MN \times \overline{CO}^3$ ſera le moment du ſecteur *OMCNO* (*n.° 86*); $\frac{MN \times CD}{2} \times CV$ ou $MN \times CD \times \frac{1}{3}\,CD$ ou $\frac{1}{3}\,MN \times \overline{CD}^3$ ſera le moment du triangle *CMDNC*; enfin $OMDNO \times CQ$ ſera le moment du ſegment *OMDNO*.

Mais le moment du ſegment *OMDNO* eſt égal au moment du ſecteur *OMCNO* moins le moment du triangle *CMDNC*.

Ainſi $OMDNO \times CQ = \begin{cases} \frac{1}{3} MN \times \overline{CO}^2 - \frac{1}{3} MN \times \overline{CD}^2 \\ \text{ou } \frac{1}{3} MN \times (\overline{CO}^2 - \overline{CD}^2). \end{cases}$

Or $\overline{CO}^2 - \overline{CD}^2$ ou $\overline{CM}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{MD}^2$; & $\frac{1}{3} MN = \frac{2}{3} MD$.

Donc $OMDNO \times CQ = \frac{2}{3} MD \times \overline{MD}^2 = \frac{2}{3} \overline{MD}^3$,

& par conſéquent $CQ = \frac{2 \overline{MD}^3}{3\, OMDNO}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

90. Le centre C du cercle étant le centre de gravité du ſyſtème des deux ſegmens $OMDNO$, $EMDNE$ qui compoſent la ſurface du cercle, ces deux ſegmens auront des momens égaux relativement à ce centre; c'eſt-à-dire que ſi les points Q, T ſont les centres de gravité des deux ſegmens $OMDNO$, $EMDNE$, l'on aura $OMDNO \times CQ = EMDNE \times CT$: & comme on vient de trouver $OMDNO \times CQ = \frac{2}{3} \overline{MD}^3$, on aura auſſi $EMDNE \times CT = \frac{2}{3} \overline{MD}^3$; & par conſéquent $CT = \frac{2 \overline{MD}^3}{3\, EMDNE}$. Fig. 64 & 65.

Ainſi le centre de gravité d'un ſegment plus grand ou plus petit que le demi-cercle, eſt éloigné du centre du cercle d'une quantité égale à deux fois le tiers du cube de la moitié de la corde de ce ſegment, diviſé par l'aire du même ſegment.

COROLLAIRE II.

91. Si du centre de gravité Q du ſegment $OMDNO$, l'on abaiſſe une perpendiculaire QS ſur le diamètre HN qui paſſe par une extrémité de l'arc Fig. 64 & 65.

du ſegment *OMDNO*, les deux triangles rectangles *CDN*, *CSQ* qui auront un angle commun au centre *C* du cercle ſeront ſemblables, & donneront *CN* : *ND* ou *CN* : *MD* :: *CQ* : *QS*. Ainſi l'on aura $QS = \frac{CQ \times MD}{CN}$. Et comme on a trouvé (*n.° 89*) $CQ = \frac{2\,\overline{MD}^3}{3\,OMDNO} = \frac{2\,\overline{MD}^2 \times MD}{3\,OMDNO}$, l'on aura $QS = \frac{2\,\overline{MD}^2 \times \overline{MD}^2}{3\,OMDNO \times CN}$, & par conſéquent $OMDNO \times QS = \frac{2\,\overline{MD}^4 \times \overline{MD}^2}{3\,CN}$.

COROLLAIRE III.

Fig. 65. **92.** Si du point *M* extrémité de l'arc *MON*, l'on abaiſſe une perpendiculaire *MF* ſur le diamètre *HN*, la corde *MN* ſera moyenne proportionnelle entre le diamètre *HN* & ſa partie *FN*; ainſi l'on aura $\overline{MN}^2 = HN \times FN = 2\,CN \times FN$, & $\frac{\overline{MN}^2}{4}$ ou $\overline{MD}^2 = \frac{CN \times FN}{2}$; & par conſéquent $\overline{MD}^2 \times \overline{MD}^2 = \frac{\overline{CN}^2 \times \overline{FN}^2}{4}$, ou $\frac{2\,\overline{MD}^2 \times \overline{MD}^2}{3\,CN} = \frac{CN \times \overline{FN}^2}{6}$.

Donc au lieu de $OMDNO \times QS = \frac{2\,\overline{MD}^4 \times \overline{MD}^2}{3\,CN}$ qu'on a trouvé dans le Corollaire précédent, on aura $OMDNO \times QS = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN$, & $QS = \frac{\overline{FN}^2 \times CN}{6\,OMDNO}$.

C'eſt-à-dire que le moment du ſegment *OMDNO* relativement au diamètre *NH* qui paſſe par une extrémité de l'arc de ce ſegment, eſt égal à la ſixième partie

partie du quarré du ſinus verſe FN de cet arc, multiplié par le rayon, &c.

Il ſuit de tout ce qui a été dit, que le moment du reſte du cercle ou celui du ſegment $EMDNE$ relativement au diamètre NH, eſt auſſi égal à $\frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN$.

COROLLAIRE IV.

93. Si l'on ſuppoſe que le diamètre eſt à la circonférence comme 7 à 22, on aura le quarré du diamètre à la ſurface du cercle, ou le quarré du rayon qui n'eſt que le quart de celui du diamètre, à l'aire du quart de cercle comme 14 eſt à 11. Fig. 64.

Cela poſé, ſi l'arc MON du ſegment eſt de 90 degrés, & que l'on veuille avoir la diſtance CQ du centre du cercle au centre de gravité du ſegment $OMDNO$, on ſubſtituera dans la formule *(n.° 89)* $CQ = \frac{2\,\overline{MD}^3}{3\,OMDNO}$ les valeurs convenables à MD & à $OMDNO$ dans le cas où l'arc MON eſt de 90 degrés.

Le triangle MDC étant rectangle en D, donne $\overline{CM}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{CD}^2$. Mais dans le cas où l'arc MON eſt de 90 degrés, les deux angles DCM, DMC ſont chacun de 45 degrés. On aura donc $MD = CD$ & $\overline{MD}^2 = \overline{CD}^2$, & par conſéquent $\overline{CM}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MD}^2 = 2\,\overline{MD}^2$, & $\frac{\overline{CM}^2}{2} = \overline{MD}^2$ ou $\frac{CM}{\sqrt{2}} = MD$. Donc $\overline{CM}^2 \times \frac{CM}{\sqrt{2}} = 2\,\overline{MD}^2 \times MD$ ou $\frac{\overline{CM}^3}{\sqrt{2}} = 2\,\overline{MD}^3$.

Puiſque $14 : 11 :: \overline{CM}^2 : OMCNO$, on aura $OMCNO = \frac{11}{14}\overline{CM}^2$; & puiſque $MD = CD$, on aura $MD \times CD$ ou l'aire du triangle $CMDNC = \overline{MD}^2$ ou $\frac{1}{2}\overline{CM}^2$, & par conſéquent $OMCNO - CMDNC$ ou l'aire du ſegment $OMDNO = \frac{11}{14}\overline{CM}^2 - \frac{1}{2}\overline{CM}^2 = \frac{2}{7}\overline{CM}^2$.

Donc dans le cas où l'arc MON ſera de 90 degrés, la formule $CQ = \frac{2\overline{MD}^3}{3\,OMDNO}$ deviendra

$$CQ = \frac{\left(\frac{\overline{CM}^3}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{6}{7}\overline{CM}^2} = \frac{7\,CM}{6\sqrt{2}}.$$

Maintenant ſi pour $2 = \frac{288}{144}$ l'on prend $\frac{289}{144}$ qui n'en diffère que de la cent quarante-quatrième partie d'une unité, l'on aura $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$, & $6\sqrt{2} = \frac{17}{2}$. Alors au lieu de $CQ = \frac{7\,CM}{6\sqrt{2}}$, on aura

$$CQ = \frac{7\,CM}{\frac{17}{2}} = \frac{14}{17}\,CM.$$

L'arc MON étant toûjours ſuppoſé de 90 degrés, ſi l'on veut avoir la diſtance QS du centre de gravité du ſegment $OMDNO$ au diamètre HN qui paſſe par l'extrémité de l'arc de ce ſegment, il faudra ſubſtituer dans la formule $QS = \frac{\overline{FN}^2 \times CN}{60\,MDNO}$ les valeurs convenables à FN & à $OMDNO$ dans le cas propoſé; ce qui ſera très-facile.

Car on remarquera aiſément que, dans le cas où l'arc MON ſera de 90 degrés, la droite MF menée perpendiculairement au diamètre HN, ſe confondra

avec le rayon MC, & qu'on aura par conſéquent $FN = CN$ & $\overline{FN}^2 \times CN = \overline{CN}^3$. Ainſi au lieu de $OMDNO \times QS = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN$, on aura $OMDNO \times QS = \frac{1}{6}\overline{CN}^3$, ou $QS = \frac{\overline{CN}^3}{6OMDNO}$.

Mais dans le cas où l'arc MON eſt de 90 degrés, on vient de voir que $OMDNO = \frac{2}{7}\overline{CM}^2$, ou $6OMDNO = \frac{12}{7}\overline{CM}^2 = \frac{12}{7}\overline{CN}^2$. On aura donc dans le même cas $QS = \frac{\overline{CN}^3}{\frac{12}{7}\overline{CN}^2} = \frac{7}{12}CN$.

THEOREME.

94. *La perpendiculaire* PR *menée du centre de gravité* P *d'un demi-ſegment de cercle* OMFNO *ſur le côté* FN *qui fait partie du diamètre, eſt égale au quarré de la partie* FN *du diamètre, multiplié par la ſomme* HF + CN *faite de l'autre partie du diamètre & du rayon, & diviſé par ſix fois l'aire de ce demi-ſegment; c'eſt-à-dire que* $PR = \frac{\overline{FN}^2 \times (HF + CN)}{6\,OMFNO}$. Fig. 66.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la corde MN de l'arc du demi-ſegment: ce demi-ſegment ſera compoſé d'un ſegment $OMDNO$ dont nous ſuppoſerons le centre de gravité placé en Q, & d'un triangle MFN dont V ſera ſuppoſé le centre de gravité.

Si l'on conſidère le moment du ſegment $OMDNO$ & celui du triangle MFN relativement au diamètre HN, dont une partie ſert de côté au demi-ſegment,

& que des centres de gravité Q, V de ces deux figures l'on mène des perpendiculaires QS, VT au diamètre HN; on aura le moment du ſegment $OMDNO$, ſavoir, $OMDNO \times QS = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN$ (*n.° 92*), & le moment du triangle MFN, ſavoir, $MFN \times VT = FN \times \frac{1}{2}MF \times \frac{1}{3}MF = \frac{1}{6}FN \times \overline{MF}^2$.

Mais ces deux momens étant conſpirans, leur ſomme eſt égale au moment de leur ſyſtème ou du demi-ſegment $OMFNO$. Ainſi en ſuppoſant que P eſt le centre de gravité du demi-ſegment $OMFNO$, & tirant PR perpendiculairement ſur le diamètre HN, on aura $OMFNO \times PR = OMDNO \times QS + MFN \times VT$.

Donc on aura auſſi $OMFNO \times PR = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN + \frac{1}{6}FN \times \overline{MF}^2$.

Mais $\overline{MF}^2 = FN \times HF$, & par conſéquent $\frac{1}{6}FN \times \overline{MF}^2 = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times HF$. Donc enfin $OMFNO \times PR = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times CN + \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times HF = \frac{1}{6}\overline{FN}^2 \times (HF + CN)$,

& $PR = \frac{\overline{FN}^2 \times (HF + CN)}{6\,OMFNO}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 66. 95. On remarque que $HF = 2CN - FN$, & $HF + CN = 3CN - FN$, ou bien $\frac{HF + CN}{6} = \frac{CN - \frac{1}{3}FN}{2}$.

Ainſi au lieu de $PR = \frac{\overline{FN}^2 \times (HF + CN)}{6\,OMFNO}$,

on aura $PR = \frac{\overline{FN}^2 \times (CN - \frac{1}{3}FN)}{2\,OMFNO}$.

COROLLAIRE II.

Fig. 66. 96. Si l'arc MON étoit de 60 degrés, on auroit

$FN = \frac{1}{2}CN$, & $CN - \frac{1}{3}FN = \frac{5}{6}CN$; ainſi $\overline{FN}^2 \times (CN - \frac{1}{3}FN) = \frac{1}{4}\overline{CN}^2 \times \frac{5}{6}CN = \frac{5}{24}\overline{CN}^3$.

Suppoſant encore le quarré du diamètre à l'aire du cercle, ou le quarré du rayon à l'aire du quart de cercle, comme 14 eſt à 11, on auroit l'aire du quart de cercle égale à $\frac{11}{14}\overline{CN}^2$; & comme le ſecteur de 60 degrés eſt les deux tiers du quart de cercle, on trouveroit le ſecteur $OMCNO = \frac{11}{21}\overline{CN}^2$.

L'arc MON étant de 60 degrés, on aura $CF = \frac{1}{2}CN$ ou $\overline{CF}^2 = \frac{1}{4}\overline{CN}^2$; & le triangle rectangle MFC donnant $\overline{MF}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{CF}^2$ ou $\overline{CN}^2 - \overline{CF}^2$, on aura $\overline{MF}^2 = \overline{CN}^2 - \frac{1}{4}\overline{CN}^2 = \frac{3\overline{CN}^2}{4}$, ou $MF = \frac{CN \times \sqrt{3}}{2}$. Mais le triangle $MFC = \frac{FC \times MF}{2}$. Ainſi $MFC = \frac{\frac{1}{2}CN \times \frac{1}{2}CN \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{CN}^2 \times \sqrt{3}}{8}$. Or $OMFNO = OMCNO - MFC$. Donc $OMFNO = \frac{11}{21}\overline{CN}^2 - \frac{1}{8}\overline{CN}^2 \times \sqrt{3}$.

Enfin ſi au lieu de 3 ou de $\frac{675}{225}$ l'on prend $\frac{676}{225}$, $\frac{26}{15}$ ſera la valeur de $\sqrt{3}$ à peu de choſe près, & l'on aura $\frac{1}{8}\overline{CN}^2 \times \sqrt{3} = \frac{1}{8}\overline{CN}^2 \times \frac{26}{15} = \frac{13}{60}\overline{CN}^2$. Ainſi au lieu de $OMFNO = \frac{11}{21}\overline{CN}^2 - \frac{1}{8}\overline{CN}^2 \times \sqrt{3}$, l'on aura $OMFNO = \frac{11}{21}\overline{CN}^2 - \frac{13}{60}\overline{CN}^2 = \frac{43}{140}\overline{CN}^2$, ou $2OMFNO = \frac{43}{70}\overline{CN}^2$.

Donc dans le cas où l'arc MON ſera de 60 degrés, au lieu de $PR = \frac{\overline{FN}^2 \times (CN - \frac{1}{3}FN)}{2OMFNO}$,

on aura $PR = \frac{\frac{5}{16}\overline{CN}^3}{\frac{41}{70}\overline{CN}^2} = \frac{175}{516}CN.$

REMARQUE.

Fig. 66. 97. Si l'on prolonge le côté MF du demi-ſegment $OMFNO$, juſqu'à ce qu'il rencontre la demi-circonférence en un ſecond point m, on aura un ſecond demi-ſegment NFm entièrement ſemblable & égal au premier; en ſorte que ſi p eſt le centre de gravité du nouveau demi-ſegment NFm, & qu'on joigne les centres de gravité des deux demi-ſegmens par une droite Pp, cette droite Pp ſera perpendiculaire au diamètre NH, & ſera coupée en deux parties égales par ce diamètre.

Le point R, où la perpendiculaire PR tirée du centre de gravité P du demi-ſegment $OMFNO$ ſur le diamètre NH rencontrera ce diamètre, ſera donc le centre de gravité du ſyſtème des deux demi-ſegmens $OMFNO$, NFm, ou du ſegment entier $NOMmO$.

Il ſuit de là que la perpendiculaire PX tirée du centre de gravité P du demi-ſegment $OMFNO$ ſur le diamètre IK parallèle au côté MF de ce demi-ſegment, eſt égale à la diſtance CR du centre du cercle au centre de gravité R du ſegment entier $NOMmN$.

Mais on a trouvé *(n.° 89)* que la diſtance du centre du cercle au centre de gravité d'un ſegment, eſt égale à deux fois le tiers du cube de la demi-corde de ce ſegment, diviſé par l'aire du même ſegment; c'eſt-à-dire que $CR = \frac{2\overline{MF}^3}{3\,NOMmN} = \frac{\overline{MF}^3}{3\,OMFN}$.

Ainſi pour déterminer la poſition du centre de

gravité P d'un demi-ſegment $OMFNO$, on prendra ſur le rayon CN une partie $CR = \frac{\overline{MF}^3}{3\,OMFNO}$; puis on élèvera par le point R ſur le même rayon une perpendiculaire $RP = \frac{\overline{FN}^2 \times (CN - \frac{1}{3}FN)}{2\,OMFNO}$; & le point P ſera le centre de gravité du demi-ſegment $OMFNO$.

THEOREME.

98. *Le centre de gravité* P *d'un ſecteur ſphérique eſt éloigné du centre* C *de la ſphère, d'une quantité égale aux trois huitièmes de ce qui reſte du diamètre, après en avoir retranché la flèche ou la hauteur* AE *de la calotte de ce ſecteur; c'eſt-à-dire que* $CP = \frac{3}{8}EF$. Fig. 67.

DÉMONSTRATION.

Imaginons le ſecteur ſphérique compoſé d'une infinité de petites pyramides égales qui ayent leurs ſommets au centre C de la ſphère, & leurs baſes dans la ſurface de la calotte qui ſert de baſe au ſecteur. Toutes ces petites pyramides ayant pour hauteur le rayon CA du ſecteur, le centre de gravité de chacune d'elles ſera éloigné du centre C de la ſphère, d'une quantité égale aux trois quarts du rayon; & par conſéquent ſi l'on imagine une nouvelle calotte MON dont le rayon $CO = \frac{3}{4}CA$, la ſurface convexe de cette calotte contiendra les centres de gravité de toutes les pyramides qui compoſeront le ſecteur ſphérique.

Comme toutes les petites pyramides dans leſquelles on imagine que le ſecteur eſt partagé, ſont ſuppoſées parfaitement égales en ſolidité & en peſanteur, elles

occuperont des parties égales dans la ſurface convexe de la calotte *MON;* ainſi les centres de gravité particuliers où les poids égaux de toutes les petites pyramides élémentaires ſont réputés réunis, ſeront uniformément répandus ſur la ſurface de la calotte *MON.*

On pourra donc conſidérer la ſurface de la calotte *MON* comme la ſeule choſe peſante dans le ſecteur ſphérique, & regarder le centre de gravité de cette calotte, comme celui du ſecteur ſphérique. Mais le centre de gravité de la calotte *MON* eſt au milieu de ſa flèche *LO (n.° 33);* ainſi le centre de gravité *P* du ſecteur ſphérique eſt au milieu de cette flèche.

Pour déterminer le centre de gravité *P* relativement aux lignes *CA, CE* qui ſont propres au ſecteur, on remarquera que les ſecteurs ſemblables *ABCDA, OMCNO* donneront $CA:CO::CE:CL::AE:OL$. Ainſi puiſque $CO=\frac{3}{4}CA$, l'on aura $CL=\frac{3}{4}CE$, & $OL=\frac{3}{4}AE$, & par conſéquent $\frac{1}{2}OL$ ou $LP=\frac{3}{8}AE=\frac{3}{8}CA-\frac{3}{8}CE$. Donc $LP+CL$ ou $CP=\frac{3}{8}CA-\frac{3}{8}CE+\frac{3}{4}CE=\frac{3}{8}CA+\frac{3}{8}CE=\frac{3}{8}FE$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 68. 99. Lorſque le ſecteur ſphérique ſera une demi-ſphère; ce qui arrivera lorſque la flèche deviendra égale au rayon, le reſte *FE* du diamètre ſera auſſi égal au rayon. Dans ce cas on aura $CP=\frac{3}{8}CA$; c'eſt-à-dire que le centre de gravité d'une demi-ſphère eſt éloigné de ſon centre, d'une quantité égale aux trois huitièmes du rayon.

COROLLAIRE II.

Fig. 67. 100. Si l'arc de grand cercle *BAD*, qui paſſe par

le ſommet de la calotte du ſecteur ſphérique, étoit de 120 degrés, on auroit $CE = \frac{1}{2}CA$, & $FE = \frac{3}{2}CA$; ainſi au lieu de $CP = \frac{3}{8}FE$, on trouveroit $CP = \frac{9}{16}CA$.

Remarque.

101. Il faut remarquer que ſi l'on avoit cherché le centre de gravité Y du ſecteur ſphérique $CBFDC$, on auroit trouvé $CY = \frac{3}{8}AE$.

THEOREME.

102. *Le centre de gravité* P *d'un ſegment ſphérique eſt éloigné du centre de la ſphère, d'une quantité* CP *égale au quart du quarré de la différence* EF *qu'il y a entre le diamètre de la ſphère & la flèche de ce ſegment, diviſé par le rayon de la ſphère moins le tiers de la flèche du ſegment.* Fig. 69.

Démonstration.

Soient p le centre de gravité du ſecteur ſphérique engendré par la révolution du ſecteur circulaire ACB ſur ſon rayon latéral AC; Q le centre de gravité du cone droit engendré par la révolution du triangle rectangle BEC ſur le même rayon; & P le centre de gravité du ſegment ſphérique engendré par la révolution du demi-ſegment circulaire $AEBA$.

On a vû *(n.° 98)* que le centre de gravité p du ſecteur ſphérique eſt éloigné du centre C, d'une quantité $Cp = \frac{3}{8}FE$; ainſi en repréſentant le ſolide de ce ſecteur par ſon profil $ABCDA$, ſon moment, relativement au centre C, ſera $ABCDA \times \frac{3}{8}FE$.

Repréſentant auſſi le ſolide du cone droit par ſon profil triangulaire BCD, le moment de ce cone par

rapport au centre C, ſera $BCD \times CQ$, ou $BCD \times \frac{3}{4}CE$.

Enfin nommant le ſolide du ſegment ſphérique par les lettres du ſegment circulaire qui en eſt le profil, $ABDA \times CP$ ſera le moment de ce ſegment ſphérique relativement au même centre C.

Mais le moment du ſecteur $ABCDA$ eſt égal à la ſomme des momens de ſes deux parties, c'eſt-à-dire, du cone BCD & du ſegment $ABDA$. Ainſi en retranchant le moment du cone de celui du ſecteur, le reſte ſera le moment du ſegment : ce qui donnera cette égalité $ABDA \times CP = ABCDA \times \frac{3}{8}EF - BCD \times \frac{1}{4}EC$.

Mais $ABCDA = ABDA + BCD$, & par conſéquent $ABCDA \times \frac{3}{8}EF = ABDA \times \frac{3}{8}EF + BCD \times \frac{3}{8}EF$.

Donc $ABDA \times CP = ABDA \times \frac{3}{8}EF + BCD \times (\frac{3}{8}EF - \frac{3}{4}EC)$.

Or $\frac{3}{8}EF - \frac{3}{4}EC = \frac{3}{8}EF - \frac{1}{2}EC - \frac{1}{8}EC = \frac{3}{8}CF - \frac{1}{8}EC = \frac{3}{8}AE$.

Ainſi $ABDA \times CP = ABDA \times \frac{3}{8}EF + BCD \times \frac{3}{8}AE$.

Et diviſant chaque membre par le ſegment ſphérique $ABDA$, on aura $CP = \frac{3}{8}EF + \frac{BCD}{ABDA} \times \frac{3}{8}AE$.

Le ſolide du cone BCD eſt le produit de l'aire du cercle qui a BE pour rayon, & du tiers de CE; & le ſolide du ſegment $ABDA$ étant *(Géom. n.° 497)* égal à un cylindre qui a AE pour rayon & $CA - \frac{1}{3}AE$ pour hauteur, eſt le produit de l'aire du cercle dont AE eſt le rayon, & de $CA - \frac{1}{3}AE$.

Or l'aire du cercle qui a AE pour rayon : l'aire du cercle qui a BE pour rayon :: $\overline{AE}^2 : \overline{BE}^2$ ou *(Géom. n.° 236)* :: $AE : EF$;

parce que les trois lignes AE, BE, EF ſont continuellement proportionnelles; &

$CA - \frac{1}{3}AE : \frac{1}{3}CE :: CA - \frac{1}{3}AE : \frac{1}{3}CE$.

Ainſi en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura

L'aire du cercle qui a AE *pour rayon, multipliée par* CA — $\frac{1}{3}$AE, *c'eſt-à-dire, le ſegment ſphérique* ABDA,

Eſt à l'aire du cercle qui a BE *pour rayon, multiplié par* $\frac{1}{3}$CE, *c'eſt-à-dire, au cone* BCD;

Comme AE × (CA — $\frac{1}{3}$AE),

Eſt à EF × $\frac{1}{3}$CE.

Et par conſéquent $\frac{BCD}{ABDA} = \frac{EF \times \frac{1}{3}CE}{AE \times (CA - \frac{1}{3}AE)}$.

Donc au lieu de $CP = \frac{3}{8}EF + \frac{BCD}{ABDA} \times \frac{3}{8}AE$, on aura $CP = \frac{3}{8}EF + \frac{EF \times \frac{1}{8}CE}{CA - \frac{1}{3}AE}$.

Multipliant la première partie $\frac{3}{8}EF$ du ſecond membre par $CA - \frac{1}{3}AE$, & la diviſant enſuite par la même quantité, on aura

$$CP = \frac{\frac{3}{8}EF \times CA - \frac{1}{8}EF \times AE + \frac{1}{8}EF \times CE}{CA - \frac{1}{3}AE} = \frac{\frac{1}{8}EF \times (3CA + CE - AE)}{CA - \frac{1}{3}AE}.$$

Mais $3CA + CE - AE = 2CA + CE + CA - AE = 2CA + 2CE = 2EF$.

Donc $CP = \frac{\frac{1}{4}EF \times 2EF}{CA - \frac{1}{3}AE} = \frac{\frac{1}{4}\overline{EF}^2}{CA - \frac{1}{3}AE}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

103. Lorſque le ſegment ſphérique *ABDA* deviendra une demi-ſphère, chacune des deux parties *AE, EF* du diamètre *AF* deviendra égale au rayon *CA*. Alors au lieu de $CP = \frac{\frac{1}{4}\overline{EF}^2}{CA - \frac{1}{3}AE}$, on aura Fig. 68.

$$CP = \frac{\frac{1}{4}\overline{CA}^2}{CA - \frac{1}{3}CA} = \frac{\frac{1}{4}CA}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}CA;$$ c'eſt-à-

dire que le centre de gravité de la demi-ſphère eſt éloigné du centre de la ſphère, d'une quantité égale aux trois huitièmes du rayon : ce que nous avons déjà démontré *(n.° 99)*.

COROLLAIRE II.

Fig. 69. **104.** Si l'arc *BAD*, qui eſt le profil de la calotte du ſegment, étoit de 120 degrés, on auroit

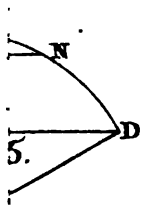
$$AE = \tfrac{1}{2}CA, \text{ \& } EF = \tfrac{3}{2}CA.$$

Ainſi au lieu de $CP = \frac{\frac{1}{4}\overline{EF}^2}{CA - \frac{1}{3}AE}$, l'on auroit

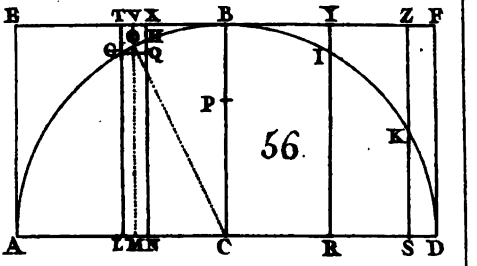
$$CP = \frac{\frac{9}{16}\overline{CA}^2}{CA - \frac{1}{6}CA} = \frac{54\,CA}{80} = \frac{27}{40}CA.$$

REMARQUE.

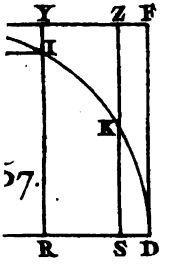
Fig. 69. **105.** Comme les deux ſegmens ſphériques *ABDA*, *FBDF* qui compoſent la ſphère entière, ſont en équilibre ſur le centre *C* de la ſphère, il eſt évident que leurs momens conſidérés par rapport à ce centre, ſont égaux. Or on aura le moment du ſegment ſphérique dont *ABDA* eſt le profil, en multipliant *CP* ou $\frac{\frac{1}{4}\overline{EF}^2}{CA - \frac{1}{3}AE}$ par le ſolide de ce ſegment ; ainſi le même produit ſera le moment du ſegment dont *FBDF* eſt le profil : & ſuppoſant que *Y* eſt le centre de gravité de ce dernier ſegment, de ſon moment diviſé par le ſolide de *FBDF* on déduira $CY = \frac{\frac{1}{4}\overline{AE}^2}{CA - \frac{1}{3}EF}$.



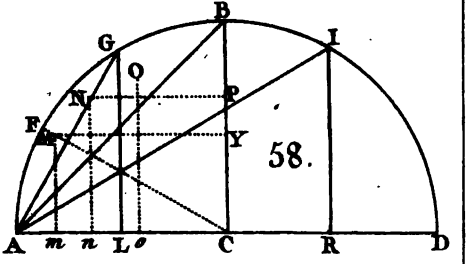
5.



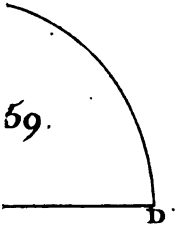
56.



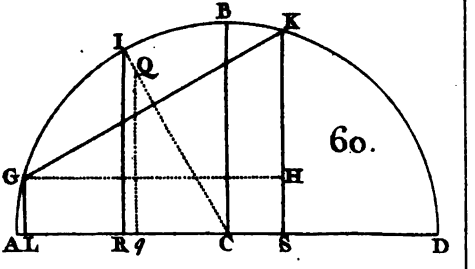
57.



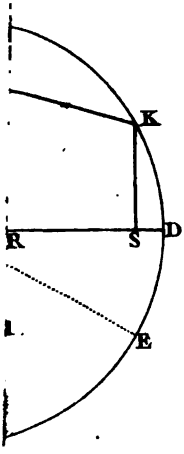
58.

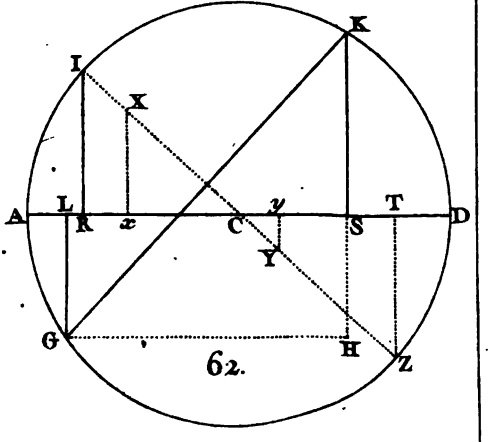


59.

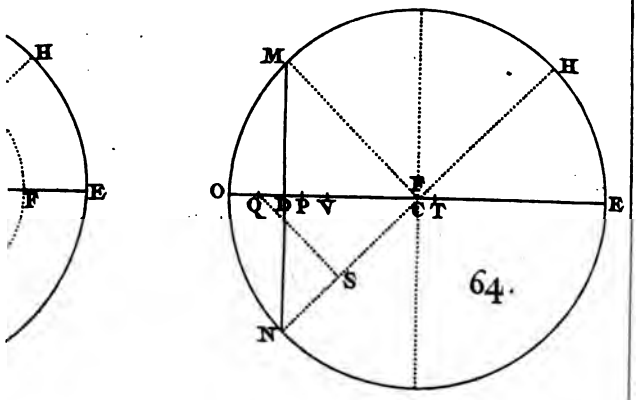


60.

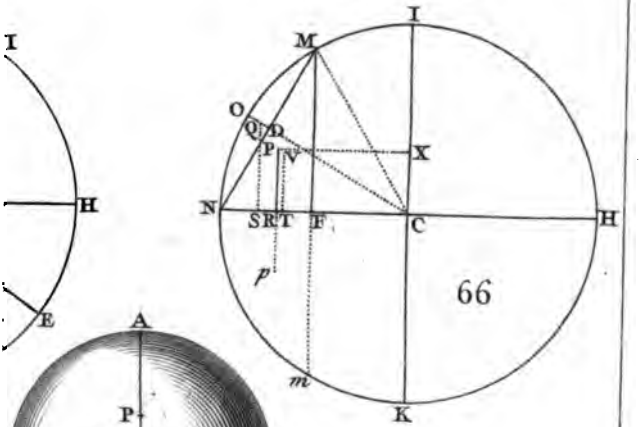




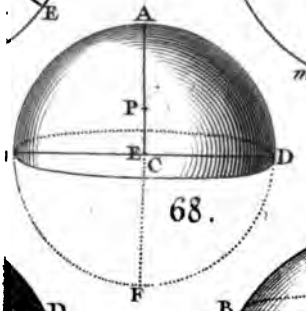
62.


H
F
E
M
H
O
Q
D
P
V
C
T
E
S
N

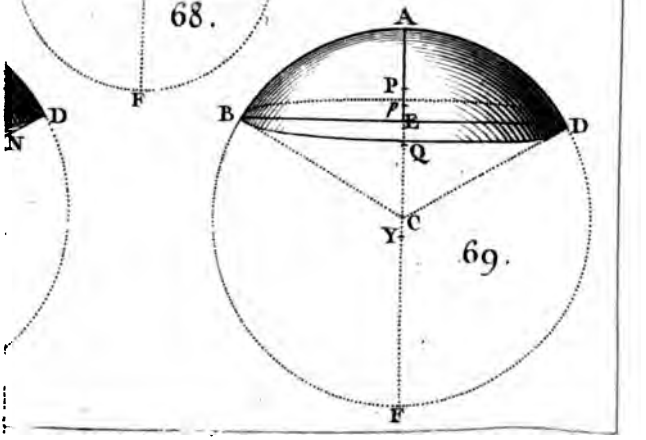
64.


I
H
E
M
I
O
Q
D
P
V
X
N
S
R
T
F
C
H
p
m
K

66


A
P
E
C
D
F

68.


D
N
A
P
p
B
E
D
Q
C
Y
F

69.

CHAPITRE VI.

Des centres de gravité des aires des ſegmens & ſecteurs elliptiques.

DÉFINITIONS.

106. ON a dit dans les Elémens de Géométrie *(n.° 609)* qu'un demi-cercle étant décrit ſur un diamètre quelconque AB, ſi de tant de points M, Q, S, D, *&c.* qu'on voudra de la demi-circonférence, l'on abaiſſe des perpendiculaires MP, QR, ST, DC, *&c.* ſur le diamètre AB, & que l'on coupe toutes ces perpendiculaires en parties proportionnelles, c'eſt-à-dire, de manière que l'on ait Fig. 70.

$GP : HR : IT : EC$: *&c.* :: $MP : QR : ST : DC$: *&c.*

la courbe AEB qu'on fera paſſer par tous les points A, G, H, I, E, B, *&c.* ſera nommée une *Demi-ellipſe.*

Si l'on fait la même opération de l'autre côté du diamètre AB, c'eſt-à-dire ſi l'on coupe toutes les ordonnées du demi-cercle ALB dans le même rapport qu'on a diviſé les ordonnées du premier demi-cercle, la courbe qui paſſera par tous les points de diviſion des ordonnées du demi-cercle ALB, ſera l'autre moitié de l'ellipſe.

Le diamètre AB qui coupe en deux parties égales & perpendiculairement toutes les cordes du cercle & de l'ellipſe, s'appelle *grand Axe* ou *premier Axe* de l'ellipſe.

La corde EF qui paſſe par le centre C commun à l'ellipſe & au cercle, & qui eſt perpendiculaire ſur le premier axe AB, ſe nomme *petit Axe* ou *ſecond Axe* de l'ellipſe.

Chaque demi-corde *PG* ou *RH* de l'ellipſe, perpendiculaire au premier axe *AB*, s'appelle *Ordonnée à ce premier Axe;* de même que chaque demi-corde *PM* ou *RQ* du cercle, perpendiculaire au même axe *AB* qui ſert de diamètre au cercle, ſe nomme *Ordonnée du cercle* par rapport au diamètre *AB*.

Les ordonnées *PG*, *PM* de l'ellipſe & du cercle qui rencontrent l'axe ou le diamètre *AB* au même point *P*, & dont l'une fait partie de l'autre, s'appellent *Ordonnées correſpondantes* de l'ellipſe & du cercle, & les extrémités *G*, *M* de ces ordonnées ſe nomment *Points correſpondans* des mêmes courbes.

Fig. 71. Les droites *GY*, *KQ* menées de la circonférence de l'ellipſe perpendiculairement ſur ſon ſecond axe *EF*, s'appellent auſſi *Ordonnées* de l'ellipſe; & pour les diſtinguer de celles qui ſont perpendiculaires au premier axe, on les nomme *Ordonnées au ſecond axe.*

Si l'on décrit un cercle ſur le petit axe *EF* comme diamètre, & que l'on tire des ordonnées *GY*, *KQ* de l'ellipſe à ce petit axe, chaque ordonnée *GY* ou *KQ* de l'ellipſe, & ſa portion *ZY* ou *OQ* compriſe dans le cercle, ſeront nommées *Ordonnées correſpondantes* de l'ellipſe & du cercle par rapport au ſecond axe *EF;* & les points *G*, *Z* ou *K*, *O* de l'ellipſe & du cercle, ſeront appelés *Points correſpondans* de ces deux courbes.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77. Si de deux points quelconques *M*, *N* de la circonférence du cercle décrit ſur le premier axe ou ſur le ſecond axe de l'ellipſe, l'on mène des perpendiculaires *MP*, *NQ* au diamètre *AB* de ce cercle; l'arc *MZN* du cercle & celui *mzn* de l'ellipſe, compris entre les ordonnées *MP*, *NQ* prolongées s'il eſt néceſſaire, ſeront nommés *Arcs correſpondans*

du cercle & de l'ellipſe; les cordes MN, mn de ces deux arcs correſpondans ſeront appelées *Cordes correſpondantes;* les ſegmens $MZNM$, $m\zeta nm$ renfermés entre ces arcs & ces cordes, ſe nommeront *Segmens correſpondans :* & ſi par les extrémités des arcs correſpondans l'on mène au centre C du cercle & de l'ellipſe des droites MC, NC, mC, nC, ces droites MC, mC ou NC, nC ſeront nommées *Rayons correſpondans;* enfin les ſecteurs MCN, mCn renfermés entre ces rayons & arcs correſpondans, s'appelleront *Secteurs correſpondans* du cercle & de l'ellipſe.

Si l'on mène une perpendiculaire au diamètre AB du cercle, qui ſert de grand axe ou de petit axe à l'ellipſe,

Les points G, g où cette perpendiculaire rencontrera le cercle & l'ellipſe correſpondans,
Ceux H, h où elle rencontrera les cordes correſpondantes MN, mn,
Ceux K, k où elle coupera les rayons correſpondans CM, Cm ou leurs prolongemens,
Ceux I, i où elle coupera les rayons correſpondans CN, Cn ou leurs prolongemens,

} ſeront nommés *Points correſpondans* par rapport au cercle & à l'ellipſe.

Les parties de la perpendiculaire au diamètre ou axe AB, compriſes entre ce diamètre & des points correſpondans, ou entre des points correſpondans par rapport au cercle ou à l'ellipſe, s'appelleront *Parties correſpondantes* d'ordonnées correſpondantes; ainſi FH & Fh, FK & Fk, FI & Fi, GH & gh, GK & gk, GI & gi, HK & hk, HI & hi, IK & ik ſont des parties correſpondantes d'ordonnées correſpondantes.

Les points ſemblablement placés dans des parties correſpondantes d'ordonnées correſpondantes, ſeront auſſi nommés *Points correſpondans.* Ainſi les milieux L, l des parties correſpondantes GH, gh, & ceux des

parties correſpondantes *GI, gi* ou *GK, gk,* ſont des points correſpondans; d'où il ſuit que les parties d'ordonnées correſpondantes compriſes entre l'axe *AB* & les milieux de leurs parties correſpondantes, ſont auſſi des parties correſpondantes.

Fig. 78 & 79. Lorſque l'ellipſe & le cercle correſpondant ſont coupés par une droite *MN* ou *mn* perpendiculaire à l'axe *AB* qui ſert de diamètre au cercle, les arcs *MAN, mAn* du cercle & de l'ellipſe ſont renfermés entre les mêmes perpendiculaires *MSm, NSn* à l'axe *AB;* ainſi ces arcs ſont correſpondans; leurs cordes *MN, mn* ſont correſpondantes; les ſegmens *AMSNA, AmSnA* renfermés entre ces cordes & ces arcs correſpondans, ſont des ſegmens correſpondans. Enfin lorſque par les extrémités des arcs correſpondans *MAN, mAn,* l'on mène au centre *C* des droites *MC, NC* & *mC, nC,* les ſecteurs *AMCNA, AmCnA* ſont correſpondans dans le cercle & l'ellipſe. Ces arcs, ces cordes, ces ſegmens & ſecteurs correſpondans ne diffèrent des précédens, qu'en ce que les derniers ont une flèche commune *AS,* & que les premiers n'ont point de flèche commune.

En conſtruiſant & définiſſant l'ellipſe de la manière qu'on vient de l'expliquer, on la regarde comme un cercle aplati, c'eſt-à-dire, comme un cercle décrit ſur ſon grand axe, & dont toutes les ordonnées ſont diminuées proportionnellement à leur longueur : mais on va voir que la même ellipſe peut être conſidérée comme un cercle alongé, c'eſt-à-dire, comme un cercle décrit ſur ſon petit axe, & dont toutes les ordonnées ſont alongées proportionnellement.

THÉOREME

THEOREME.

107. *Si de la circonférence de l'ellipſe on mène vers le ſecond axe* EF *des droites* GY, KQ *perpendiculaires à ce ſecond axe, ou parallèles au premier axe* AB, *& qu'on décrive un cercle ſur le ſecond axe* EF *comme diamètre, les ordonnées* GY, KQ *de l'ellipſe ſeront aux ordonnées correſpondantes* ZY, OQ *du cercle, comme* AB *eſt à* EF, *ou comme* CA *eſt à* CE; *c'eſt-à-dire, comme le grand axe ou ſa moitié, eſt au petit axe ou à ſa moitié.* Fig. 71.

DÉMONSTRATION.

Sur le premier axe *AB* de l'ellipſe, comme diamètre, ſoit décrit un cercle *ADBLA;* & par l'extrémité *G* d'une ordonnée quelconque *GY* au ſecond axe *EF* de l'ellipſe, ſoit menée une perpendiculaire *MGP* au premier axe *AB :* puis du point *M* où cette perpendiculaire rencontre la circonférence du grand cercle, ſoit tiré le rayon *MC.* On va d'abord prouver que ce rayon rencontrera en un même point Z, l'ordonnée *GY* au ſecond axe *EF* de l'ellipſe, & la circonférence du petit cercle décrit ſur ce ſecond axe.

Par la propriété de l'ellipſe, on aura *(n.° 106)* $CD : CE :: PM : PG$. Mais le point Z étant conſidéré comme l'interſection du rayon *AC* avec l'ordonnée *GY* au ſecond axe, & *GY* étant parallèle à *PC*, les triangles ſemblables *CPM, ZGM* donneront $PM : PG :: CM : CZ$. On aura donc $CD : CE :: CM : CZ$; & puiſque les antécédens *CD, CM* de cette proportion ſont égaux, les conſéquens *CE, CZ* ſeront auſſi égaux. Ainſi *CE* étant

rayon du cercle décrit ſur le ſecond axe *EF*, *CZ* ſera auſſi un rayon du même cercle; & par conſéquent le point *Z* où le rayon *MC* rencontrera l'ordonnée *GY*, ſera ſur la circonférence du petit cercle *HEIFH*. Cela poſé, la démonſtration du Théorème ſera facile.

Les triangles ſemblables *CPM*, *ZYC* donnent *CP* : *ZY* :: *CM* : *CZ*, ou :: *CA* : *CE*, ou :: *AB* : *EF*; c'eſt-à-dire que chaque ordonnée *GY* au petit axe de l'ellipſe, eſt à l'ordonnée correſpondante *ZY* du petit cercle décrit ſur ce ſecond axe, comme le grand axe *AB* ou ſa moitié *CA* eſt au petit axe *EF*, ou à ſa moitié *CE*. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Fig. 71. **108.** Chaque ordonnée *GY* ou *KQ* au ſecond axe de l'ellipſe, étant à l'ordonnée correſpondante *ZY* ou *OQ* du cercle décrit ſur ce ſecond axe, comme *AB* eſt à *EF*, ou comme *CA* eſt à *CE*, on aura *GY* : *ZY* :: *KQ* : *OQ*, ou *GY* : *KQ* :: *ZY* : *OQ*. Ainſi toutes les ordonnées *GY*, *KQ* au ſecond axe de l'ellipſe, peuvent être regardées comme les ordonnées *ZY*, *OQ* du cercle décrit ſur cet axe, leſquelles ſont alongées proportionnellement.

THEOREME.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77. **109.** *Si par un point quelconque* G *de la circonférence du cercle correſpondant à l'ellipſe, on mène une perpendiculaire* GKF *ou* GHF *au diamètre* AB *qui ſert de grand axe ou de petit axe à l'ellipſe; les parties de cette perpendiculaire, compriſes entre l'axe* AB *& des points correſpondans du cercle & de l'ellipſe, ou entre des points correſpondans de ces deux courbes, ſeront proportionnelles aux deux axes* AB, de *de l'ellipſe, ou à leurs moitiés* CA, Cd;

$$\textit{c'eſt-à-dire qu'on aura} \left\{ \begin{array}{ll} 1.^{o} & FG : Fg \\ 2.^{o} & FK : Fk \\ 3.^{o} & FI : Fi \\ 4.^{o} & FH : Fh \\ 5.^{o} & GH : gh \\ 6.^{o} & GK : gk \\ 7.^{o} & GI : gi \\ 8.^{o} & HK : hk \\ 9.^{o} & HI : hi \\ 10.^{o} & IK : ik \end{array} \right\} :: AB : de \textit{ ou } :: CA : Cd.$$

DÉMONSTRATION.

1.° On vient de voir qu'une ordonnée quelconque FG du cercle au diamètre AB qui ſert de grand axe ou de petit axe à l'ellipſe, eſt à l'ordonnée correſpondante Fg de l'ellipſe, comme cet axe AB eſt à l'autre axe de, ou comme CA eſt à Cd; ainſi l'on aura $FG : Fg :: AB : de$ ou $:: CA : Cd$.

2.° Les droites FKG, PM étant toutes deux perpendiculaires à l'axe AB, & par conſéquent parallèles; les portions de ces lignes compriſes entre CP & les rayons correſpondans CM, Cm du cercle & de l'ellipſe, ſeront proportionnelles entr'elles; c'eſt-à-dire que *(Géom. n.° 262)* l'on aura $FK : Fk :: PM : Pm$. Mais *(n.° 106)* on aura par la propriété de l'ellipſe

$$PM : Pm :: AB : de, \text{ ou } :: CA : Cd;$$

ainſi $FK : Fk :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

3.° Les droites FHG, QN étant auſſi perpendiculaires à l'axe AB, & par conſéquent parallèles; les parties de ces lignes compriſes entre l'axe AB & les rayons correſpondans CN, Cn du cercle & de l'ellipſe ſeront auſſi proportionnelles entr'elles; c'eſt-à-dire que l'on aura $FI : Fi :: QN : Qn$.

Mais *(n.° 106)* $QN : Qn :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

Donc $FI : Fi :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

4.° Les deux ordonnées PM, QN du cercle étant parallèles entr'elles, & proportionnelles aux ordonnées correſpondantes Pm, Qn de l'ellipſe, les cordes correſpondantes MN, mn & l'axe AB prolongés, s'il eſt néceſſaire, concourront en un même point S *(Géom. n.° 264)*; & par conſéquent *(Géom. n.° 262)* on aura $FH : Fh :: PM : Pm$.

Mais $PM : Pm :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

Donc $FH : Fh :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

5.° Puiſqu'on a trouvé $\left\{\begin{matrix} FG : Fg \\ FH : Fh \end{matrix}\right\} :: AB : de$,

on aura $FG : Fg :: FH : Fh$;

& par conſéquent

(Fig. 72 & 75, en prenant la perpendiculaire GFH qui coupe l'axe entre ſon extrémité & le point S), on aura

$FG + FH : Fg + Fh :: FG : Fg$,

ou $:: AB : de$; c'eſt-à-dire,

$GH : gh :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

& (Fig. 73, 74, 76 & 77), on aura

$FG - FH : Fg - Fh :: FG : Fg$,

ou $:: AB : de$; c'eſt-à-dire,

$GH : gh :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

6.° Puiſqu'on a trouvé $\left\{\begin{matrix} FG : Fg \\ FK : Fk \end{matrix}\right\} :: AB : de$,

on aura $FG : Fg :: FK : Fk$, & par conſéquent $FG - FK : Fg - Fk :: FG : Fg$, ou $:: AB : de$; c'eſt-à-dire, $GK : gk :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

7.° Puiſque $\left\{\begin{matrix} FG : Fg \\ FI : Fi \end{matrix}\right\} :: AB : de$,

on aura $FG : Fg :: FI : Fi$;

& par conſéquent
1.° $FG + FI : Fg + Fi :: FG : Fg$, ou $:: AB : de$;
c'eſt-à-dire (fig. 72 & 75)
$GI : gi :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.
2.° $FG - FI : Fg - Fi :: FG : Fg$, ou $:: AB : de$;
c'eſt-à-dire (fig. 73, 74, 76 & 77)
$GI : gi :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

8.° Puiſque $\left\{\begin{matrix} FH : Fh \\ FK : Fk \end{matrix}\right\} :: AB : de$,
on aura $FH : Fh :: FK : Fk$;
& par conſéquent (fig. 74 & 77)
$FH - FK : Fh - Fk :: FH : Fh$, ou $:: AB : de$;
c'eſt-à-dire, $HK : hk :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

9.° Puiſque $\left\{\begin{matrix} FH : Fh \\ FI : Fi \end{matrix}\right\} :: AB : de$,
on aura $FH : Fh :: FI : Fi$;

& par conſéquent
(Fig. 72 & 75, en prenant la perpendiculaire GHI qui coupe l'axe entre le centre C & le point S) on aura
$FH + FI : Fh + Fi :: FH : Fh :: AB : de$,
ou bien $HI : hi :: AB : de :: CA : Cd$.

(Fig. 72 & 75, en prenant la perpendiculaire GHI qui rencontre l'axe entre ſon extrémité A & le point S) on aura
$FI - FH : Fi - Fh :: FH : Fh :: AB : de$,
ou bien $HI : hi :: AB : de :: CA : Cd$.

Enfin (fig. 73, 74, 76 & 77) on aura
$FH - FI : Fh - Fi :: FH : Fh :: AB : de$,
ou bien $HI : hi :: AB : de :: CA : Cd$.

10.° Puiſque $\left\{\begin{matrix} FK : Fk \\ FI : Fi \end{matrix}\right\} :: AB : de$,

on aura $FK : Fk :: FI : Fi$;

& par conſéquent
- (Fig. 72 & 75) $FK + FI : Fk + Fi :: FK : Fk$, ou $:: AB : de$; c'eſt-à-dire, $IK : ik :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.
- (Fig. 73 & 76) $FK - FI : Fk - Fi :: FK : Fk$, ou $:: AB : de$; c'eſt-à-dire, $IK : ik :: AB : de$, ou $:: CA : Cd$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77.

110. Si l'on conſidère deux ſegmens correſpondans $ZMHNZ$, $zmhnz$ du cercle & de l'ellipſe, & qu'on les imagine compoſés d'élémens correſpondans GH, gh perpendiculaires à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipſe, on reconnoîtra aiſément que ces deux ſegmens ſont proportionnels aux deux axes AB, de de l'ellipſe.

Car ces ſegmens correſpondans, étant tous deux compris entre les mêmes parallèles MP, NQ ou mP, nQ perpendiculaires à l'axe AB, ſont compoſés d'un même nombre d'élémens : & puiſque *(n.° 109)* chaque élément GH du ſegment circulaire eſt à chaque élément correſpondant gh du ſegment elliptique correſpondant, comme AB eſt à de, on trouvera que

La ſomme des élémens du ſecteur circulaire ZMHNZ *ou l'aire de ce ſegment,*

Eſt à la ſomme des élémens du ſecteur elliptique correſpondant zmhnz, *ou à l'aire de ce ſegment,*

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe, Eſt à l'autre axe* de *de l'ellipſe.*

On doit remarquer dans les figures 72 & 75, que les ſegmens circulaire & elliptique correſpondans *ZMHNZ, ζmhnζ* contiennent non ſeulement des élémens correſpondans *GH, gh* entre leurs arcs & leurs cordes, mais que leurs parties correſpondantes *AZQNA, AζQnA* ſont encore compoſées de cordes élémentaires *RT, rt* perpendiculaires à l'axe *AB*, & par conſéquent parallèles entr'elles. Fig. 72 & 75.

Or ces cordes élémentaires *RT, rt* étant doubles des ordonnées *VR, Vr* qui ſont proportionnelles aux deux axes *AB, de* de l'ellipſe, ſont en même raiſon que ces axes. Ainſi dans les figures 72 & 75, comme dans les autres, tous les élémens correſpondans des deux ſegmens *ZMHNZ, ζmhnζ* ſont proportionnels aux deux axes *AB, de;* & par conſéquent ces deux ſegmens qui ſont compoſés d'un même nombre d'élémens, ſont auſſi proportionnels aux mêmes axes *AB, de.*

Il faut encore remarquer que ſi deux ſegmens correſpondans *AMSNA, AmSnA* du cercle & de l'ellipſe avoient pour flèche commune une partie *AS* de l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe, ils auroient pour élémens correſpondans des cordes correſpondantes *RT, rt* du cercle & de l'ellipſe; & comme ces cordes élémentaires ſont doubles des ordonnées correſpondantes *VR, Vr*, & par conſéquent proportionnelles aux deux axes *AB, de*, il eſt clair que dans ce cas, ainſi que dans les autres, on aura cette proportion : Fig. 78 & 79.

La ſomme des élémens du ſegment circulaire AMSNA *ou l'aire de ce ſegment,*

Eſt à la ſomme des élémens, ou à l'aire du ſegment elliptique correſpondant AmSnA,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*
Eſt à l'autre axe de *de l'ellipſe.*

COROLLAIRE II.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77.

III. Si l'on conſidère deux ſecteurs correſpondans *ZMCNZ, zmcnz* du cercle & de l'ellipſe, & qu'on les imagine compoſés d'élémens perpendiculaires ſur l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe, on reconnoîtra qu'ils ſont compoſés d'un même nombre d'élémens, & que leurs élémens correſpondans ſont des lignes correſpondantes *KI, ki,* ou *GI, gi,* ou *GK, gk,* ou des cordes correſpondantes *RT, rt.*

Or *(n.° 109)* toutes ces lignes correſpondantes ſont chacune à chacune, comme *AB* eſt à *de.* Ainſi

La ſomme des élémens ou l'aire du ſecteur circulaire ZMCNZ,

Eſt à la ſomme des élémens ou à l'aire du ſecteur elliptique correſpondant zmCnz,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*
Eſt à l'autre axe de *de l'ellipſe.*

Fig. 78 & 79.

On peut remarquer que ſi les deux ſecteurs correſpondans *AMCNA, AmCnA* ont un ſommet *A* commun, leurs élémens correſpondans ſeront de deux eſpèces ſeulement; ſavoir, des cordes correſpondantes *RT, rt* qui ſont dans le même rapport que les deux axes *AB, de,* & des lignes correſpondantes *KI, ki,* qui ſont auſſi proportionnelles aux mêmes axes *AB, de (n.° 109).* On aura donc dans tous les cas,

La ſomme des élémens d'un ſecteur circulaire ou l'aire de ce ſecteur,

Eſt à la ſomme des élémens, ou à l'aire du ſecteur elliptique correſpondant,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe*

Eſt à l'autre axe de *de la même ellipſe.*

COROLLAIRE III.

112. Si l'on prend les milieux ou centres de gravité L, l des élémens correſpondans GH, gh des deux ſegmens circulaire & elliptique correſpondans, on aura $GL : gl :: GH : gh$, ou *(n.° 109)* $:: AB : de$. Et puiſque *(n.° 109)* on a auſſi $FG : Fg :: AB : de$, on aura $FG : Fg :: GL : gl$, & par conſéquent $FG - GL : Fg - gl :: FG : Fg$, ou $:: AB : de$; c'eſt-à-dire, $FL : Fl :: AB : de$. Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77.

Multipliant cette dernière proportion par ordre avec celle-ci $GH : gh :: AB : de$, on trouvera $GH \times FL : gh \times Fl :: \overline{AB}^2 : \overline{de}^2$; c'eſt-à-dire que ſi l'on conſidère les momens des élémens des ſegmens circulaire & elliptique correſpondans par rapport à l'axe AB commun à l'ellipſe & au cercle, on aura

Le moment GH × FL *de chaque élément* GH *du ſegment circulaire,*

Eſt au moment gh × Fl *de chaque élément correſpondant du ſegment elliptique.*

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ *de l'axe commun au cercle & à l'ellipſe*

Eſt au quarré $\overline{de}^2$ *de l'autre axe de l'ellipſe.*

D'où il ſuit que l'on aura cette proportion :

La ſomme des momens GH × FL *de tous les élémens du ſegment circulaire, ou le moment de ce ſegment conſidéré par rapport à l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*

Eſt à la ſomme des momens gh × Fl *de tous les élémens du ſegment elliptique correſpondant, ou au moment de ce ſegment conſidéré par rapport au même axe* AB,

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ *de l'axe commun au cercle & à l'ellipſe,*

Eſt au quarré $\overline{de}^2$ *de l'autre axe de l'ellipſe.*

Ainſi connoiſſant le moment d'un ſegment de cercle conſtruit ſur l'un des axes donnés d'une ellipſe, on trouvera par une ſimple proportion le moment du ſegment elliptique correſpondant.

Fig. 78 & 79. 113. *On doit remarquer que ſi les ſegmens correſpondans* AMSNA, AmSnA *du cercle & de l'ellipſe avoient la même flèche* AS, *ils ſeroient tous deux coupés en deux parties égales & ſemblables par l'axe* AB *commun à l'ellipſe & au cercle; ainſi ces deux ſegmens dont les centres de gravité ſe trouveroient dans l'axe* AB, *auroient des momens nuls par rapport à cet axe. Mais cette remarque ne fait point une exception à la règle qu'on vient d'établir; car* zéro *pris un nombre de fois quelconque ne produiſant jamais que* zéro, zéro *ſera à* zéro *dans quel rapport on voudra, & par conſéquent on aura toûjours*

Le moment du ſegment circulaire *AMSNA*, quoique nul par rapport au diamètre *AB* commun au cercle & à l'ellipſe,

Eſt au moment du ſegment elliptique correſpon-

dant $AmSnA$, qui eſt auſſi nul par rapport au même axe AB.

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ de cet axe,

Eſt au quarré $\overline{de}^2$ de l'autre axe de l'ellipſe.

COROLLAIRE IV.

114. On démontrera de la même manière que le moment de chaque élément du ſecteur circulaire MCN, conſidéré par rapport à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipſe, eſt au moment de chaque élément correſpondant du ſecteur elliptique mCn, conſidéré par rapport au même axe AB, comme le quarré $\overline{AB}^2$ de cet axe, eſt au quarré $\overline{de}^2$ de l'autre axe de l'ellipſe. Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77.

Car on ne trouve dans ces ſecteurs que trois ſortes d'élémens ; ſavoir,

Fig. 72, 73, 74, 75, 76, 77, des élémens correſpondans GI, gi compris entre les arcs correſpondans MZN, mzn & leurs rayons correſpondans CN, Cn.

Fig. 74 & 77, des élémens correſpondans GK, gk contenus entre les mêmes arcs correſpondans MZN, mzn & leurs rayons correſpondans CM, Cm.

Fig. 72, 73, 75, 76, des élémens correſpondans KI, ki compris entre les rayons extrêmes CM, CN du ſecteur circulaire, & les rayons extrêmes correſpondans Cm, Cn du ſecteur elliptique.

Fig 72, 75, des élémens correſpondans RT, rt terminés par les arcs correſpondans MZN, mzn, dont nous avons déjà prouvé *(n.° 112)* que les momens ſont proportionnels aux quarrés $\overline{AB}^2$, $\overline{de}^2$ des deux axes de l'ellipſe.

Or *(n.° 109)* tous ces élémens correſpondans ſont proportionnels aux deux axes AB, de. Ainſi en prenant leurs milieux X, x; Y, y; O, o;

on aura $\left\{\begin{matrix} IX : ix \\ KY : ky \\ IO : io \end{matrix}\right\} :: AB : de$;

& puiſque *(n.° 109)* $\left\{\begin{matrix} FI : Fi \\ FK : Fk \end{matrix}\right\} :: AB : de$,

on aura $\left\{\begin{matrix} IX : ix :: FI : Fi \\ KY : ky :: FK : Fk \\ IO : io :: FI : Fi \end{matrix}\right\}$ ou $:: AB : de$;

& par conſéquent

Fig. 72, 75. $IX - FI : ix - Fi :: FI : Fi$ ou $:: AB : de$ } c'eſt-à-dire, $FX : Fx :: AB : de$

Fig. 73, 74, 76, 77. $IX + FI : ix + Fi :: FI : Fi$ ou $:: AB : de$ }

Fig. 74, 77. $KY + FK : ky + Fk :: FK : Fk$ ou $:: AB : de$ } c'eſt-à-dire, $FY : Fy :: AB : de$

Fig. 72, 75. $IO - FI : io - Fi :: FI : Fi$ ou $:: AB : de$ } c'eſt-à-dire, $FO : Fo :: AB : de$.

Fig. 73, 74, 75, 76. $IO + FI : io + Fi :: FI : Fi$ ou $:: AB : de$ }

Multipliant par ordre ces proportions avec celles-ci . . . . . $\left\{\begin{matrix} GI : gi :: AB : de \\ GK : gk :: AB : de \\ KI : ki :: AB : de. \end{matrix}\right.$

Savoir $\left\{\begin{matrix} GI : gi :: AB : de \text{ par } FX : Fx :: AB : de \\ GK : gk :: AB : de \text{ par } FY : Fy :: AB : de \\ KI : ki :: AB : de \text{ par } FO : Fo :: AB : de \end{matrix}\right\}$

on aura $\left\{\begin{matrix} GI \times FX : gi \times Fx :: \overline{AB}^2 : \overline{de}^2 \\ GK \times FY : gk \times Fy :: \overline{AB}^2 : \overline{de}^2 \\ KI \times FO : ki \times Fo :: \overline{AB}^2 : \overline{de}^2 ; \end{matrix}\right\}$ c'eſt-à-dire que

Le moment de chaque élément du ſecteur circulaire MCN *conſidéré par rapport à l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*

Eſt au moment de chaque élément correſpondant du

ſecteur elliptique mCn, *conſidéré par rapport au même axe* AB,

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ *de cet axe,*

Eſt au quarré $\overline{de}^2$ *de l'autre axe de l'ellipſe.*

D'où il ſuit que l'on aura auſſi

La ſomme des momens des élémens du ſecteur circulaire, ou le moment de ce ſecteur conſidéré par rapport à l'axe AB,

Eſt à la ſomme des momens de tous les élémens correſpondans du ſecteur elliptique, ou au moment de ce ſecteur conſidéré par rapport au même axe AB,

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ *de cet axe,*

Eſt au quarré $\overline{de}^2$ *de l'autre axe de l'ellipſe.*

115. *On remarquera comme on a fait* (n.° 113) *pour les ſegmens circulaires & elliptiques correſpondans, que ſi le ſecteur circulaire* MCN *& le ſecteur elliptique correſpondant* mCn *ont une flèche commune* AP, *ils ſeront diviſés en deux parties égales & ſemblables par l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipſe. Ainſi ces deux ſecteurs dont les centres de gravité ſe trouveront dans l'axe* AB, *auront des momens nuls par rapport à cet axe. Mais ces momens nuls n'apportent point d'exception à l'analogie qu'on vient de démontrer.* Fig. 78 & 79.

COROLLAIRE V.

116. Les élémens *GH*, *gh* des ſegmens circulaire & elliptique correſpondans étant toûjours ſuppoſés perpendiculaires à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe; ſi l'on conſidère leurs momens relativement à un axe quelconque *DE* qui leur ſoit parallèle, les perpendiculaires *L* &, *l* & menées des centres de gravité Fig. 72, 73, 74, 75, 76, & 77.

L, l des élémens correſpondans GH, gh ſur cet axe DE, ſeront égales; ainſi l'on aura cette proportion $GH \times L\& : gh \times l\& :: GH : gh$; ou (*n.° 109*) $:: AB : de$; c'eſt-à-dire que le moment de chaque élément du ſegment circulaire ſera au moment de chaque élément correſpondant du ſegment elliptique, comme l'axe AB commun au cercle & à l'ellipſe eſt à l'autre axe de de l'ellipſe.

Fig. 72, 73, 75, 76. Donc dans les cas où les ſegmens correſpondans ne ſeront pas coupés par l'axe DE, relativement auquel on conſidère les momens, on aura

La ſomme des momens de tous les élémens du ſegment circulaire, ou le moment de ce ſegment,

Eſt à la ſomme des momens de tous les élémens du ſegment elliptique correſpondant, ou au moment de ce ſegment,

Comme l'axe A B *commun au cercle & à l'ellipſe,*
Eſt à l'autre axe d e *de l'ellipſe.*

Fig. 74 & 77. Et dans le cas où les deux ſegmens correſpondans du cercle & de l'ellipſe ſeront diviſés par l'axe DE des momens, le premier en deux parties DMV, DNV, le ſecond en deux parties correſpondantes dmu, dnu; on aura

La ſomme des momens des élémens qui compoſent la partie D M V *ou* D N V *du ſegment circulaire, c'eſt-à-dire, le moment de cette partie* D M V *ou* D N V,

Eſt à la ſomme des momens des élémens qui compoſent la partie correſpondante d m u *ou* d n u *du ſegment elliptique, c'eſt-à-dire, eſt au moment de cette partie* d m u *ou* d n u,

Comme l'axe A B *commun au cercle & à l'ellipſe,*
Eſt à l'autre axe d e *de l'ellipſe.*

Ainſi dans ce dernier cas l'on aura

Le moment de la partie DNV *du ſegment circulaire,*

Eſt au moment de la partie correſpondante dnu *du ſegment elliptique,*

Comme le moment de l'autre partie DMV *du ſegment circulaire,*

Eſt au moment de la partie correſpondante dmu *du ſegment elliptique;*

Et par conſéquent en prenant la différence des antécédens & des conſéquens, on aura

La différence des momens oppoſés des deux parties DNV, DMV *du ſegment circulaire, ou le moment de ce ſegment,*

Eſt à la différence des momens oppoſés des deux parties dnu, dmu *du ſegment elliptique correſpondant, ou au moment de ce ſegment,*

Comme le moment de la partie DNV,

Eſt au moment de la partie correſpondante dnu,

ou { *Comme l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipſe.*
{ *Eſt à l'autre axe* de *de l'ellipſe.*

Lorſque le ſegment circulaire *AMSNA*, & le ſegment elliptique correſpondant *AmSnA* ont la même flèche *AB*, & que l'on conſidère leurs momens par rapport à un axe *DE* parallèle à leurs cordes *MN*, *mn*, ou perpendiculaire à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe, ils ſont dans le cas des ſegmens dont nous venons de comparer les momens; c'eſt-à-dire que leurs momens ſont proportionnels aux deux axes *AB*, *de* de l'ellipſe. Fig. 78 & 79.

Car ſi par un point quelconque *V* de la flèche commune *AP*, l'on mène à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe une perpendiculaire *MN* ou *mn*,

qui rencontre la circonférence du cercle en *M, N,* & celle de l'ellipſe en *m, n,* les cordes *M N, m n* ſeront des élémens correſpondans des deux ſegmens *AMSNA, AmSnA,* & les produits *RT* × *CV, rt* × *CV* ſeront les momens de ces élémens correſpondans, relativement à l'axe *DE.*

Or *RT* × *CV* : *rt* × *CV* :: *RT* : *rt* ou :: *VR* : *Vr,* ou *(n.° 106)* :: *AB* : *de.*

Donc ſi l'on conſidère les momens de deux ſegmens *AMSNA, AmSnA* circulaire & elliptique par rapport à un axe *DE* perpendiculaire à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe, on aura

La ſomme des momens RT × CV *de tous les élémens du ſegment circulaire* AMSNA, *ou le moment de ce ſegment,*

Eſt à la ſomme des momens rt × CV *de tous les élémens du ſegment elliptique correſpondant* AmSnA, *ou au moment de ce ſegment,*

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*

Eſt à l'autre axe de *de l'ellipſe.*

COROLLAIRE VI.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77.

117. Si l'on veut comparer les momens des ſecteurs correſpondans *ZMCNZ, ζmCnζ* du cercle & de l'ellipſe, relativement à un axe *DE* perpendiculaire à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe, on trouvera que leurs momens ſont proportionnels aux deux axes *AB, de.*

Car ſi l'on conſidère que ces ſecteurs ſont compoſés d'un même nombre d'élémens perpendiculaires à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe; que ces élémens correſpondans ſont proportionnels aux deux

axes

axes AB, de; & que leurs milieux ou centres de gravité étant également éloignés de l'axe DE par rapport auquel on conſidère les momens, les produits de ces élémens & de leur diſtance à l'axe DE, ſont proportionnels à ces élémens; on reconnoîtra aiſément que

Dans le cas où les ſecteurs correſpondans ne ſont pas coupés par l'axe DE des momens, on aura Fig. 72, 73, 75 & 76.

La ſomme des momens de tous les élémens du ſecteur circulaire ZMCNZ, *ou le moment de ce ſecteur,*

A la ſomme des momens des élémens du ſecteur elliptique correſpondant zmCnz, *ou au moment de ce ſecteur,*

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*

Eſt à l'autre axe de *de l'ellipſe.*

Et dans le cas où les deux ſecteurs correſpondans $ZMCNZ$, $zmCnz$ du cercle & de l'ellipſe ſont partagés par l'axe DE, l'un en deux ſecteurs MCD, NCD, l'autre en deux ſecteurs mCd, nCd correſpondans aux deux premiers; on trouvera que Fig. 74 & 77.

Le moment de chacun des deux ſecteurs circulaires MCD, NCD,

Eſt au moment de chacun des deux ſecteurs elliptiques correſpondans mCd, nCd,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*

Eſt à l'autre axe de *de l'ellipſe.*

Ainſi l'on aura dans ce ſecond cas

Le moment du ſecteur circulaire MCD,

Au moment du ſecteur elliptique correſpondant mCd,

Comme le moment du ſecteur circulaire NCD,

Eſt au moment du ſecteur elliptique correſpondant nCd,

Ou { *Comme l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*
{ *Eſt à l'autre axe* de *de l'ellipſe.*

Et par conſéquent ſi l'on prend la différence des antécédens & des conſéquens de cette proportion, l'on aura

La différence des momens oppoſés des deux ſecteurs circulaires MCD, NCD, *ou le moment du ſecteur entier* ZMCNZ,

Eſt à la différence des momens oppoſés des deux ſecteurs elliptiques correſpondans mCd, nCd, *ou au moment du ſecteur elliptique entier* zmCnz,

Comme le moment du ſecteur circulaire MCN,

Eſt au moment du ſecteur elliptique mCn,

Ou { *Comme l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*
{ *Eſt à l'autre axe* de *de l'ellipſe.*

Fig. 78 & 79. Si les ſecteurs circulaire & elliptique correſpondans *AMCNA, AmCnA* ſont diviſés chacun en deux parties égales & ſemblables par l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe, il eſt évident qu'ils ſeront dans le premier cas des ſecteurs de ce Corollaire. Ainſi leurs momens ſeront proportionnels aux deux axes *AB, de* de l'ellipſe.

THEOREME.

Fig. 72, 73, 74, 75, 76 & 77. 118. *Les centres de gravité de deux ſegmens ou de deux ſecteurs correſpondans du cercle & de l'ellipſe, ſont dans une même perpendiculaire à l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipſe.*

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que les centres de gravité de deux ſegmens ou de deux ſecteurs correſpondans du cercle & de l'ellipſe, ſont dans une même droite perpendiculaire à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe,

il ſuffit de faire voir que ces centres de gravité ſont également éloignés d'un axe de momens DE perpendiculaire à l'axe AB.

On a trouvé *(n.os 116 & 117)* que ſi l'on conſidère les momens de deux ſegmens ou de deux ſecteurs correſpondans du cercle & de l'ellipſe par rapport à un même axe DE perpendiculaire à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipſe, on aura

Le moment du ſegment ou du ſecteur circulaire,

Eſt au moment du ſegment ou du ſecteur elliptique correſpondant,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*

Eſt à l'autre axe de *de l'ellipſe.*

On a vû auſſi *(n.os 110 & 111)* que dans tous les cas,

L'aire du ſegment ou du ſecteur circulaire,

Eſt à l'aire du ſegment ou du ſecteur elliptique correſpondant,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*

Eſt à l'autre axe de *de l'ellipſe.*

Ainſi en diviſant ces deux proportions par ordre, on aura

Le moment du ſegment ou du ſecteur circulaire, diviſé par l'aire de ce ſegment ou de ce ſecteur,

Eſt au moment du ſegment ou du ſecteur elliptique correſpondant, diviſé par l'aire de ce ſegment ou de ce ſecteur,

Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe, diviſé par lui-même, c'eſt-à-dire, comme l'unité,*

Eſt à l'autre axe de *de l'ellipſe, diviſé par lui-même, ou à l'unité.*

Or les deux derniers termes de cette proportion étant égaux, les deux premiers le ſeront auſſi.

Mais *(n.° 61)* le moment du ſegment ou du ſecteur circulaire ou elliptique, diviſé par l'aire de ce ſegment ou de ce ſecteur, eſt la diſtance du centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur à l'axe DE relativement auquel on a conſidéré le moment.

Donc la diſtance de l'axe DE des momens au centre de gravité du ſegment ou du ſecteur circulaire, eſt égale à la diſtance du même axe DE au centre de gravité du ſegment ou du ſecteur elliptique correſpondant. Ainſi les centres de gravité de deux ſegmens ou de deux ſecteurs correſpondans du cercle & de l'ellipſe, ſont dans une même droite parallèle à l'axe DE, ou perpendiculaire à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipſe.

COROLLAIRE I.

Fig. 78 & 79.

119. Lorſque le ſegment ou le ſecteur circulaire & le ſegment ou le ſecteur elliptique correſpondant ont pour flèche commune une partie AS de l'axe AB commun au cercle & à l'ellipſe, & ſont par conſéquent diviſés chacun en deux parties égales & ſemblables par cet axe AB, il eſt évident que les centres de gravité de ces deux ſegmens ou de ces deux ſecteurs correſpondans ſont dans le même axe AB.

Mais on vient de démontrer que les centres de gravité de ces deux ſegmens ou de ces deux ſecteurs ſont également éloignés d'un axe de momens DE perpendiculaire au même axe AB.

Donc les deux ſegmens ou les deux ſecteurs correſpondans du cercle & de l'ellipſe dont il eſt queſtion, ont le même centre de gravité.

COROLLAIRE II.

120. Donc si l'on veut avoir le centre de gravité d'un segment elliptique $AmSnA$ divisé en deux parties égales & semblables par le grand ou le petit axe AB de l'ellipse, on pourra décrire ou imaginer sur cet axe AB comme diamètre un cercle $ADBEA$, & prolonger, s'il est nécessaire, la corde mn de ce segment jusqu'à la circonférence du cercle, pour avoir le segment circulaire correspondant $AMSNA$; ensuite chercher *(n.° 89 & suiv.)* le centre de gravité V de ce segment circulaire, & prendre ce centre de gravité V pour celui du segment elliptique $AmSnA$. Fig. 78 & 79.

Or on déterminera *(n.° 89)* le centre de gravité V du segment circulaire $AMSNA$, si l'on prend sur l'axe AB, en partant du centre C, une partie $CV = \frac{2}{3}\frac{\overline{SM}^3}{AMSNA}$. Ainsi l'on aura par ce moyen le centre de gravité V du segment elliptique $AmSnA$.

Mais *(n.° 109)* $de : AB :: Sm : SM$, ou $\overline{de}^3 : \overline{AB}^3 :: \overline{Sm}^3 : \overline{SM}^3$; & l'on a trouvé *(n.° 110)* $de : AB :: AmSnA : AMSNA$. Donc en divisant ces deux proportions par ordre, on aura $\overline{de}^2 : \overline{AB}^2 :: \frac{\overline{Sm}^3}{AmSnA} : \frac{\overline{SM}^3}{AMSNA}$, & par conséquent $\frac{\overline{SM}^3}{AMSNA} = \frac{\overline{Sm}^3 \times \overline{AB}^2}{AmSnA \times \overline{de}^2}$.

Ainsi $\frac{2}{3}\frac{\overline{SM}^3}{AMSNA}$ ou $CV = \frac{2}{3}\frac{\overline{Sm}^3 \times \overline{AB}^2}{AmSnA \times \overline{de}^2}$.

COROLLAIRE III.

121. Si l'on demande le centre de gravité d'un Fig. 78 & 79.

ſecteur elliptique $AmCnA$ diviſé en deux parties égales & ſemblables par le grand ou le petit axe AB de l'ellipſe, on décrira ou l'on imaginera ſur cet axe AB comme diamètre un cercle $ADBEA$, & l'on prolongera s'il eſt néceſſaire la corde mn de l'arc de ce ſecteur, juſqu'à la circonférence du cercle qui ſera rencontrée en M, N; puis on tirera les deux rayons CM, CN, pour avoir un ſecteur circulaire $AMCNA$ correſpondant au ſecteur elliptique. Enfin l'on cherchera *(n.° 85 & ſuivans)* le centre de gravité Q de ce ſecteur circulaire, & l'on prendra ce centre de gravité Q pour celui du ſecteur elliptique $AmCnA$.

Mais *(n.° 85)* on aura le centre de gravité Q du ſecteur circulaire $AMCNA$, ſi l'on prend ſur l'axe AB, une partie $CQ = \frac{2}{3}\frac{MN \times CA}{MAN}$.

Ainſi l'on aura le centre de gravité Q du ſecteur elliptique $AmCnA$ par le même moyen.

THEOREME.

Fig. 80 & 81.

122. *Deux ſegmens correſpondans* ZMONZ zmonz *du cercle & de l'ellipſe, étant terminés par les mêmes ordonnées* MP, NQ *ou* mP, nQ *perpendiculaires à l'axe* AB *commun au cercle & à l'ellipſe :*

1.° Si du centre de gravité V *du ſegment circulaire* ZMONZ *l'on mène une perpendiculaire* VT *à l'axe* AB, *& que l'on prenne ſur cette perpendiculaire une partie* Tu, *telle que l'on ait* AB : de :: TV : Tu; *le point* u *ſera le centre de gravité du ſegment elliptique correſpondant* zmonz.

2.° Si du centre de gravité X *du ſecteur circulaire* ZMCNZ, *l'on abaiſſe une perpendiculaire* XY *ſur l'axe* AB, *& qu'on prenne ſur cette perpendiculaire une*

partie Yx, *telle que l'on ait* AB : de :: YX : Yx, *le point* x *ſera le centre de gravité du ſecteur elliptique correſpondant* zmCnz.

DÉMONSTRATION.

On a démontré *(n.° 118)* que les centres de gravité de deux ſegmens ou de deux ſecteurs correſpondans du cercle & de l'ellipſe ſont dans une même perpendiculaire à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe: ainſi les centres de gravité *u*, *x* du ſegment elliptique *zmonz* & du ſecteur elliptique *zmCnz* ſeront dans les perpendiculaires *VT*, *XY* menées des centres de gravité *V*, *X* du ſegment circulaire *ZMONZ*, & du ſecteur circulaire *ZMCNZ*.

Ainſi il reſte ſeulement à démontrer que $\begin{cases} TV : Tu :: AB : de \\ YX : Yx :: AB : de. \end{cases}$

On a vû *(n.os 112 & 114)* que les momens des ſegmens & des ſecteurs circulaires & elliptiques correſpondans, étant conſidérés relativement à l'axe *AB* commun au cercle & à l'ellipſe, on aura

Le moment ZMONZ × TV *du ſegment circulaire, ou celui* ZMCNZ × YX *du ſecteur circulaire,*

Eſt au moment zmonz × Tu *du ſegment elliptique, ou à celui* zmCnz × Yx *du ſecteur elliptique,*

Comme le quarré $\overline{AB}^2$ *de l'axe commun au cercle & à l'ellipſe,*

Eſt au quarré $\overline{de}^2$ *de l'autre axe de l'ellipſe.*

Et l'on a trouvé *(n.os 110 & 111)* que

Le ſegment ZMONZ *ou le ſecteur* ZMCNZ *du cercle,*

Eſt au ſegment zmonz *ou au ſecteur* zmCnz *de l'ellipſe,*

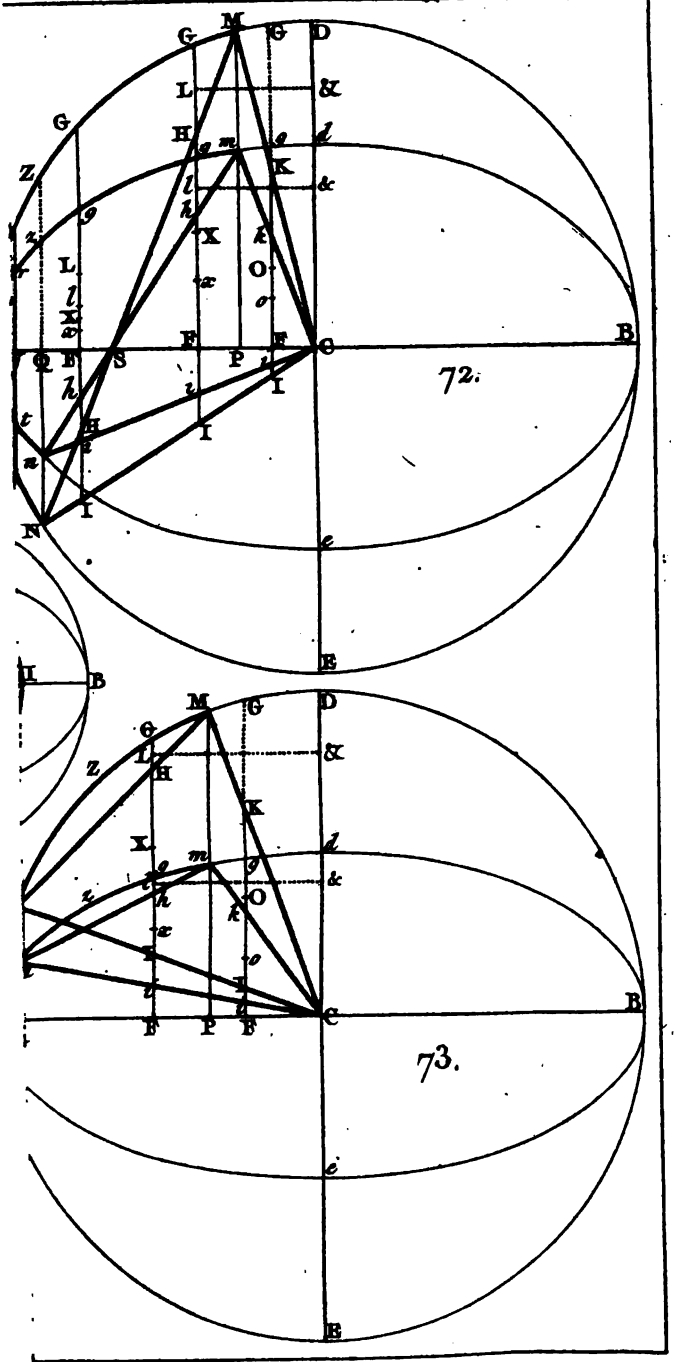
Comme l'axe AB *commun au cercle & à l'ellipſe,*

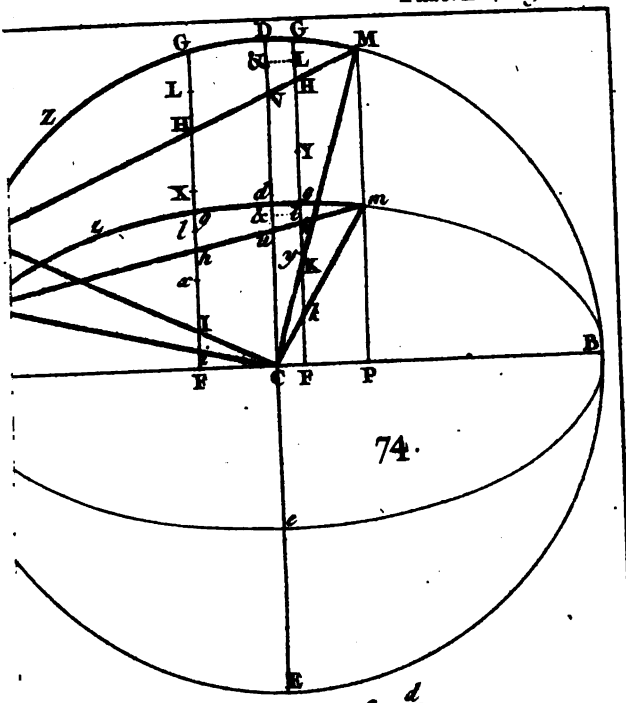
Eſt à l'autre axe de *de l'ellipſe.*

Ainſi en diviſant ces deux proportions par ordre, on aura $\left\{\begin{matrix} TV : Tu \\ YX : Yx \end{matrix}\right\} :: AB : de$. *C. Q. F. D.*

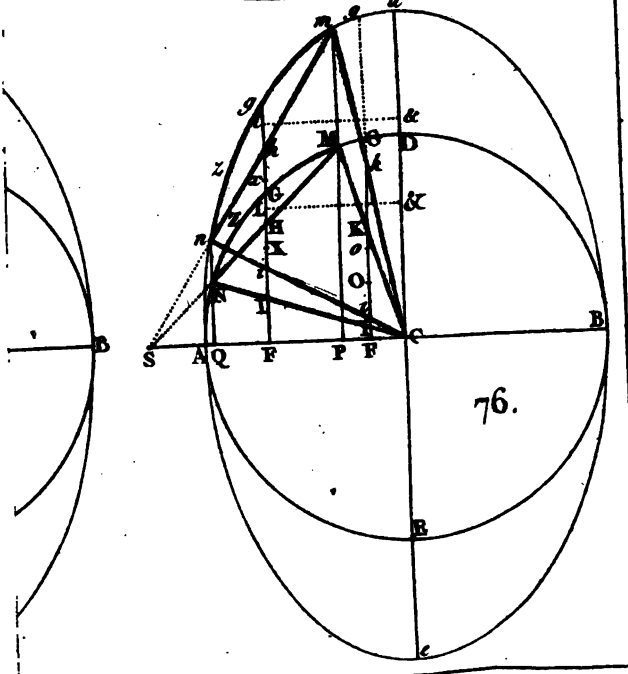
COROLLAIRE.

Fig. 80 & 81. **123.** Donc ſi l'on veut avoir le centre de gravité u d'un ſegment quelconque $\zeta mon\zeta$, ou celui x d'un ſecteur $\zeta mCn\zeta$ de l'ellipſe, on cherchera un axe AB de l'ellipſe, & l'on décrira un cercle ſur cet axe comme diamètre. Puis par les extrémités m, n de l'arc du ſegment ou du ſecteur elliptique, on mènera deux ordonnées mP, nQ à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipſe, afin que ces ordonnées prolongées s'il eſt néceſſaire juſqu'à la circonférence du cercle, déterminent ſur cette circonférence un arc MZN correſpondant à celui $m\zeta n$ du ſegment ou du ſecteur elliptique. Enſuite la corde MN & les rayons extrêmes MC, NC de l'arc de cercle MZN étant tirés, on trouvera *(n.° 89 & ſuivans, & n.° 85 & ſuivans)* le centre de gravité V du ſegment circulaire $ZMONZ$ & celui X du ſecteur circulaire $ZMCNZ$. Enfin l'on mènera par ces centres de gravité V, X, des perpendiculaires VT, XY à l'axe AB commun au cercle & à l'ellipſe : & ayant pris ſur elles, prolongées s'il eſt néceſſaire, des parties Tu, Yx qui ſoient à ces perpendiculaires comme de eſt à AB, les points u, x ainſi déterminés ſeront les centres de gravité du ſegment $\zeta mon\zeta$ & du ſecteur $\zeta mCn\zeta$ de l'ellipſe.

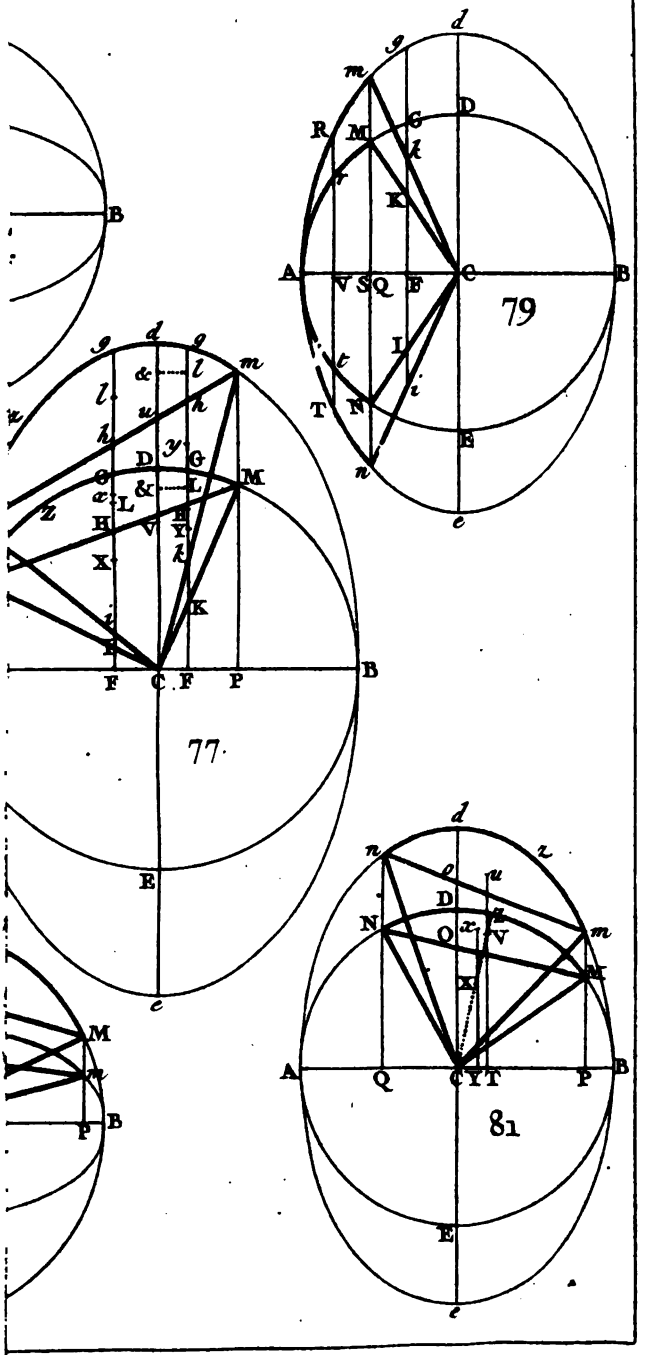

M
G
G
D
L
&
H
d
K
Z
X
O
B
F
P
S
Q
I
N
E
72.
73.


G
D
G
M
L
L
H
Z
H
V
Y
X
d
e
m
z
l
c
b
y
K
h
x
k
I
i
F
C
F
P
B
E

74.


n
e
d
g
c
M
D
z
k
&
H
K
X
o
O
N
I
B
S
A
Q
F
P
F
C
E

76.


d
g
m
R
M
G
D
k
r
K
A
V
S
Q
F
C
B
79
t
L
T
N
i
E
n
e
B
g
d
g
m
l
&
l
u
h
h
y
D
G
M
L
H
V
Y
X
K
F
C
F
P
B
77
E
e
M
P
B
d
n
r
ρ
u
D
N
O
x
V
m
X
A
Q
C
Y
T
P
B
81
E
e

CHAPITRE VII.

Des centres de gravité des ſegmens & ſecteurs de ſphéroïdes elliptiques.

LEMME.

124. *LORSQUE des droites* FAa, GMm, HDd, &c. *parallèles entr'elles, ſont rencontrées par des plans* ZV, XV, YV *qui concourent en une même droite* RV, *elles ſont coupées par ces plans en parties proportionnelles entr'elles & à leurs totalités.* Fig. 82 & 83.

DÉMONSTRATION.

Soient menées par les droites parallèles *FAa, GMm, HDd, &c.* des plans *FRa, GSm, HTd, &c.* parallèles entr'eux.

Les droites *FR, GS, HT, &c.* où ces plans parallèles rencontreront le plan *ZV*, ſeront parallèles.

Les droites *AR, MS, DT, &c.* où les mêmes plans parallèles rencontreront le plan *XV*, ſeront auſſi parallèles.

Enfin les droites *aR, mS, dT, &c.* où les mêmes plans parallèles rencontreront le plan *YV*, ſeront parallèles entr'elles.

Ainſi tous les triangles *FRA, GSM, HTD, &c.* auront les côtés parallèles chacun à chacun, & ſeront par conſéquent ſemblables; & tous les triangles *FRa, GSm, HTd, &c.* auront auſſi les côtés parallèles chacun à chacun, & ſeront par conſéquent ſemblables.

Les triangles ſemblales *FRA, GSM, HTD, &c.* donneront *FA : GM : HD : &c :: FR : GS : HT : &c.*

Les triangles ſemblables FRa, GSm, HTd, *&c.* donneront $FR : GS : HT$: *&c.* :: $Fa : Gm : Hd$: *&c.*

Donc $FA : GM : HD$: *&c.* :: $Fa : Gm' : Hd$: *&c.*

C'eſt-à-dire, $FA : Fa :: GM : Gm :: HD : Hd$: *&c.*

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Fig. 82 & 83. **125.** Donc ſi tant de droites qu'on voudra FAa, GMm, HDd, *&c.* parallèles entr'elles, & terminées par deux plans ZV, YV qui ſe rencontrent en RV, ſont coupées en parties proportionnelles aux points A, M, D, *&c.* ou alongées proportionnellement juſqu'aux points A, M, D, *&c.* c'eſt-à-dire, ſi $FA : GM : HD$: *&c.* :: $Fa : Gm : Hd$: *&c.* les points A, M, D, *&c.* ſeront dans un même plan XV qui paſſera par la ſection commune RV des deux premiers plans.

Car ſi le plan XV, qui paſſeroit par le point A de la droite FAa & par la ſection commune RV des deux premiers plans, ne paſſoit pas par les points M, D, *&c.* des autres lignes GMm, HDd, il paſſeroit par quelques autres points O, Q, *&c.* de ces lignes; & l'on auroit *(n.° 124)* $FA : GO : HQ$: *&c.* :: $Fa : Gm : Hd$: *&c.*

Mais on ſuppoſe $FA : GM : HD$: *&c.* :: $Fa : Gm : Hd$: *&c.*

Ainſi l'on auroit $FA : GO : HQ$: *&c.* :: $FA : GM : HD$: *&c.* ce qui ne peut arriver que dans le cas où les points M, D, *&c.* ſe confondent avec les points O, Q, *&c.* dans leſquels on ſuppoſe que le plan XV rencontre les lignes GMm, HOo.

REMARQUE.

Fig. 82 & 83. **126.** On peut remarquer que ſi les droites paralèles FAa, GMm, HDd, LBb, IEe, *&c.* forment par leurs rencontres avec le plan XV, la circonférence

d'un cercle *AMDBEA*, ces mêmes lignes formeront par leurs rencontres avec les deux autres plans *ZV*, *YV*, des circonférences d'ellipſes, dont une peut être un cercle dans certains cas.

La première partie de cette remarque étant eſſentielle à la théorie des centres de gravité des ſegmens & ſecteurs d'ellipſoïdes, on n'en doit pas négliger la démonſtration, ſur-tout dans le cas où les parallèles FAa, GMm, HDd, LBb, IEe, &c. *ſont perpendiculaires à l'un des trois plans, par exemple, au plan* ZV ; *parce que dans la ſuite de ce chapitre on trouvera des ellipſes & des cercles correſpondans formés de cette manière, & qu'on n'en pourroit pas reconnoître la nature ſans la démonſtration de cette remarque.*

Par un diamètre *AB* du cercle *AMDBEA*, parallèle à la ſection commune *RV* des trois plans, & par les deux droites *FAa*, *LBb*, qui terminent ce diamètre & qu'on ſuppoſe perpendiculaires au plan *ZV*, on mènera un plan *FBa* qui rencontrera les deux plans *ZV*, *YV* en *FL*, *ab*, & qui ſera perpendiculaire au plan *ZV*.

La ſection commune *RV* des trois plans, étant parallèle au diamètre *AB*, peut être conſidérée comme une ligne contenue dans un plan parallèle au plan *FBa* qui paſſe par le diamètre *AB*. Ainſi *RV*, *FL* & *RV*, *ab* peuvent être regardées comme des ſections de ces deux plans parallèles coupés par les plans *ZV*, *YV*; d'où il ſuit que les trois droites *FL*, *AB*, *ab* ſont parallèles à *RV*, & par conſéquent parallèles entr'elles : & comme les parallèles *FL*, *AB*, *ab* ſont compriſes entre des parallèles *FAa*, *LBb*, les quadrilatères *FB*, *Fb*, *Ab* ſont des parallélogrammes qui ont les côtés oppoſés égaux.

Par le centre *C* du cercle *AMDBEA* ſoit tirée parallèlement aux droites *FAa, HDd, GMm, &c.* ou perpendiculairement au plan *ZV*, une droite *KCc*; & ſoit mené par cette droite un plan *HDdT* auquel le diamètre *AB* du cercle ſoit perpendiculaire: les parallèles *FL, ab* à ce diamètre ſeront perpendiculaires au même plan *HDdT*. Ainſi les trois lignes *AB, FL, ab* ſeront perpendiculaires aux trois lignes *DT, HT, dT* qu'elles rencontrent dans le plan *HDdT*; & réciproquement les droites *DT, HT, dT* ſeront perpendiculaires aux trois lignes *AB, FL, ab*.

Par l'une quelconque *GMm* des parallèles qu'on ſuppoſe perpendiculaires au plan *ZV*, ſoit mené un plan *GMmS* parallèle au plan *HDdT*: les rencontres *GS, MS, mS* de ce plan avec les trois plans *ZV, XV, YV* ſeront parallèles aux rencontres *HT, DT, dT* du plan parallèle *HDdT* avec les mêmes plans *ZV, XV, YV*, & par conſéquent perpendiculaires aux trois droites *FL, AB, ab*. Enfin les rencontres *NPp, KCc* des mêmes plans parallèles *GMmS, HDdT* avec le plan *FBa*, ſeront parallèles; & par conſéquent les droites parallèles *KN, CP, cp*, compriſes entr'elles, ſeront égales.

Les droites *AB, FL, ab* étant égales, ſi on les imagine placées les unes ſur les autres, elles conviendront parfaitement; & leurs parties *CP, KN, cp*, qui ſont auſſi égales, conviendront pareillement: en ſorte que les droites *PM, NG, pm*, qu'on a démontré perpendiculaires aux droites *AB, FL, ab*, auront la même direction, & pourront être regardées comme les ordonnées correſpondantes d'un cercle *AMDBEA*, & de deux courbes *FGHLIF, amdbea* décrites ſur un même diamètre *AB*. Ainſi

pour démontrer que ces deux courbes ſont des ellipſes correſpondantes au cercle *AMDBEA*, il ſuffit de démontrer que les ordonnées *PM* du cercle ſont aux ordonnées correſpondantes *NG* ou *pm* de ces courbes, comme l'axe *AB* commun au cercle & à ces courbes eſt à l'autre axe *HI* ou *de* de ces courbes.

Les droites *NPp*, *GMm* étant toutes deux parallèles à *KCc*, & par conſéquent parallèles entr'elles, les droites *MS*, *GS*, *mS* ſeront coupées par *NPp* en parties proportionnelles; c'eſt-à-dire, qu'on aura *PM* : *NG* : *pm* :: *PS* : *NS* : *pS*.

Les droites *KCc*, *HDd*, étant auſſi parallèles, les droites *DT*, *HT*, *dT*, ſeront auſſi coupées en parties proportionnelles; c'eſt-à-dire, qu'on aura *CT* : *KT* : *cT* :: *CD* : *KH* : *cd*.

Mais les droites *AB*, *FL*, *ab* étant parallèles à *RV*, les parallèles *PS*, *CT* ſeront égales, auſſi-bien que les parallèles *NS*, *KT*, & que les parallèles *pS*, *cT*. Ainſi l'on aura *PM* : *NG* : *pm* :: *CD* : *KH* : *cd*; c'eſt-à-dire que

Chaque ordonnée PM *du cercle* AMDBEA,
Eſt à chaque ordonnée correſpondante NG *ou* pm *des deux courbes* FGHLIF, amdbea,
Comme CD,
Eſt à KH *ou à* cd.

Ou { *Comme* 2CD *ou* DE *ou* AB, *axe qui peut être commun au cercle & aux deux courbes,*
Eſt à 2KH = HI *ou à* 2cd = de.

C. Q. F. D.

DÉFINITIONS.

127. Si l'on fait tourner une demi-ellipſe *aDb* Fig. 84 & 85.

ſur ſon petit axe ou ſur ſon grand axe ab, le ſolide engendré par cette révolution ſera nommé *Ellipſoïde* ou *Sphéroïde elliptique;* & ce ſphéroïde ſera aplati ou alongé, ſuivant que l'ellipſe génératrice aura tourné ſur ſon petit axe ou ſur ſon grand axe.

Si ſur le plan de l'ellipſe on imagine un demi-cercle ADB qui ait pour rayon le demi-axe CD de l'ellipſe, perpendiculaire à l'axe ab de révolution, ce demi-cercle ADB qui *(n.° 106)* ſera correſpondant à la demi-ellipſe aDb, produira dans ſa révolution une ſphère qu'on nommera *Sphère correſpondante du ſphéroïde elliptique.*

Le demi-axe CD commun au cercle & à l'ellipſe étant perpendiculaire à l'axe AB de révolution, produira un plan circulaire $DdEeD$ auquel l'axe AB ou ab ſera perpendiculaire; & comme ce plan circulaire diviſera la ſphère & le ſphéroïde elliptique en deux parties égales, on le nommera *Equateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde.*

Chaque perpendiculaire telle que PMN ou pmn menée à l'équateur, ſe nomme *Ordonnée* à ce plan; & ſes parties PM, PN, ou pm, pn, terminées par la ſurface de la ſphère & par celle de l'ellipſoïde, s'appellent *Ordonnées correſpondantes* de la ſphère & de l'ellipſoïde.

COROLLAIRE I.

Fig. 84 & 85. **128.** Donc ſi l'on coupe la ſphère & l'ellipſoïde correſpondant par un plan quelconque mené ſuivant l'axe ab de révolution, la ſection de l'ellipſoïde ſera une ellipſe diviſée par l'axe ab en deux parties égales & ſemblables à la demi-ellipſe génératrice aDb; & la ſection de la ſphère ſera un cercle correſpondant

diviſé par le même axe AB ou ab en deux parties égales & ſemblables au demi-cercle générateur ADB.

Car la demi-ellipſe aDb génératrice de l'ellipſoïde, & le demi-cercle ADB générateur de la ſphère, ont engendré dans leur révolution & formé ſur leur figure, tous les plans aDb, adb, aEb, aeb, *&c.* de l'ellipſoïde, & tous ceux ADB, AdB, AEB, AeB, *&c.* de la ſphère, qui peuvent être regardés comme des ſections de ces deux ſolides juſqu'à leur axe ab ou AB de révolution. Ainſi chaque ſection de l'ellipſoïde ſuivant l'axe ab, eſt compoſée de deux demi-ellipſes égales & ſemblables à la demi-ellipſe génératrice aDb, & qui ont le même axe ab; & chaque ſection correſpondante de la ſphère ſuivant le même axe, eſt compoſée de deux demi-cercles égaux & ſemblables au demi-cercle générateur ADB, & qui ont un diamètre AB commun.

COROLLAIRE II.

129. Deux ordonnées correſpondantes quelconques PM, PN, ou pm, pn de la ſurface de l'ellipſoïde & de celle de la ſphère, étant dans une même ligne perpendiculaire ſur l'équateur commun à ces deux ſolides, & par conſéquent parallèles à l'axe ab de révolution, ſeront toûjours dans un même plan de ſection mené par l'axe AB ou ab de révolution; ainſi ces deux ordonnées correſpondantes de la ſphère & de l'ellipſoïde ſeront auſſi des ordonnées correſpondantes d'un cercle & d'une ellipſe décrits ſur un même axe égal au diamètre DE de l'équateur. Fig. 84 & 85.

Or *(n.° 106)* les ordonnées correſpondantes d'un cercle & d'une ellipſe décrits ſur un même axe, ſont

en même rapport que cet axe commun & l'autre axe de l'ellipſe. Donc

Chaque ordonnée PM *ou* pm *de la ſphère*

Eſt à chaque ordonnée correſpondante PN *ou* pn *de l'ellipſoïde,*

Comme l'axe ou le diamètre DE *de l'équateur commun à ces deux ſolides,*

Eſt à l'autre axe ab *de l'ellipſoïde.*

Il ſuit de là que deux ordonnées correſpondantes de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont proportionnelles à deux autres ordonnées correſpondantes des mêmes ſolides.

COROLLAIRE III.

Fig. 84 & 85. 130. La ſphère peut être conſidérée comme l'aſſemblage d'une infinité de filets ou d'ordonnées *PM, pm, &c.* perpendiculaires ſur tous les points de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde; & l'ellipſoïde peut être auſſi regardé comme la ſomme d'une infinité de filets ou d'ordonnées correſpondantes *PN, pn, &c.* perpendiculaires ſur tous les points du même équateur.

Or en conſidérant ainſi la ſphère & l'ellipſoïde, on verra évidemment qu'ils ſont compoſés d'un même nombre de filets, ou d'ordonnées correſpondantes chacune à chacune; & comme *(n.° 129)* les ordonnées correſpondantes de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont en même rapport que le diamètre *DE* de l'équateur commun à ces deux ſolides, & l'autre axe *ab* de l'ellipſoïde, & qu'elles ſont par conſéquent proportionnelles chacune à ſa correſpondante, il eſt clair qu'on aura cette proportion:

La

La ſomme des ordonnées qui compoſent la ſphère, ou le ſolide de cette ſphère,

Eſt à la ſomme des ordonnées qui compoſent l'ellipſoïde, ou au ſolide de l'ellipſoïde,

Comme l'axe ou diamètre DE *de l'équateur commun à ces deux ſolides,*

Eſt à l'autre axe ab *de l'ellipſoïde.*

COROLLAIRE IV.

131. Si l'on coupe un ſphéroïde aplati ou alongé par un plan *opy*, & que de tous les points du contour de cette ſection l'on mène perpendiculairement ſur l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde des ordonnées *oR*, *pT*, *yZ*, *&c.* qui, prolongées s'il eſt néceſſaire, rencontrent la ſurface de la ſphère correſpondante en *O*, *P*, *Y*, *&c.* on a vû *(n.° 129)* qu'on aura $Ro : RO :: Tp : TP :: Zy : ZY ::$ *&c.* Ainſi *(n.° 125)* tous les points *O*, *P*, *Y* où la ſurface de la ſphère ſera rencontrée, ſe trouveront dans un même plan qui paſſera par la ſection commune du plan de l'équateur & du plan *opy* ſuivant lequel on aura coupé l'ellipſoïde. Fig. 86 & 87.

Comme la ſection de la ſphère par un plan eſt un cercle, & que tous les points *O*, *P*, *Y*, *&c.* où la ſurface de la ſphère eſt rencontrée par les lignes parallèles *oR*, *pT*, *yZ*, *&c.* menées du bord de la ſection de l'ellipſoïde, ſont dans un même plan; il eſt clair que tous ces points de rencontre *O*, *P*, *Y*, *&c.* forment ſur la ſurface de la ſphère la circonférence d'un cercle : d'où il ſuit *(n.° 126)* que le bord *opy* de la ſection de l'ellipſoïde eſt une ellipſe correſpondante au cercle *OPY*.

COROLLAIRE V.

Fig. 86 & 87. **132.** Puiſque *(n.° 131)* le plan de ſection *OPY* de la ſphère & le plan de ſection correſpondant *opy* de l'ellipſoïde, concourent en une même ligne avec le plan de l'équateur, toutes les parallèles *FXx*, *ROo*, *&c.* rencontrées par ces plans, ſeront coupées proportionnellement *(n.° 124)*; c'eſt-à-dire qu'on aura $FX : Fx :: RO : Ro$.

Mais *ROo* paſſant par les bords des ſections correſpondantes de la ſphère & de l'ellipſoïde, *RO* & *Ro* ſeront des ordonnées correſpondantes de ces deux ſolides, & ſeront par conſéquent *(n.° 129)* proportionnelles à deux autres ordonnées correſpondantes *FG*, *Fg* des mêmes ſolides; c'eſt-à-dire qu'on aura $RO : Ro :: FG : Fg$.

Donc $FX : Fx :: FG : Fg$, ou $FG : Fg :: FX : Fx$; & par conſéquent $FG - FX : Fg - Fx :: FG : Fg$, c'eſt-à-dire, $GX : gx :: FG : Fg$.

Mais *(n.° 129)* $FG : Fg :: CA : Ca$ ou $:: DE : 2Ca$.

Donc $GX : gx :: DE : 2Ca$; c'eſt-à-dire que les filets correſpondans *GX*, *gx* qui compoſent les ſegmens correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde, ſont en même rapport que le diamètre *DE* de l'équateur commun à ces deux ſolides & l'autre axe $2Ca$ de l'ellipſoïde.

Et comme les deux ſegmens correſpondans ſont compoſés d'un même nombre de filets, puiſqu'ils ſont compris entre les mêmes parallèles perpendiculaires à leur équateur commun, il eſt évident qu'on aura cette proportion :

La ſomme des filets qui compoſent le ſegment ſphérique, ou le ſolide de ce ſegment,

Eſt à la ſomme des filets qui compoſent le ſegment correſpondant d'ellipſoïde, ou au ſolide de ce ſegment;

Comme l'axe DE *de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde,*

Eſt à l'autre axe 2Ca *de l'ellipſoïde.*

COROLLAIRE VI.

133. Si l'on joint au ſegment ſphérique le cone *COPY*, & au ſegment correſpondant d'ellipſoïde le cone *Copy*, pour avoir un ſecteur ſphérique & un ſecteur correſpondant d'ellipſoïde, & que ces deux ſecteurs, dont les bords ſont terminés par les mêmes droites *ROo*, *TPp*, *ZYy*, ſoient imaginés compoſés de filets élémentaires correſpondans tels que *GV*, *gu* ſitués deux à deux dans une même droite *FGg* perpendiculaire à l'équateur commun; on verra évidemment que ces deux ſecteurs ſolides ſont compoſés d'un même nombre de filets. Fig. 86 & 87.

Par le centre *C* commun à la ſphère & à l'ellipſoïde, & par une droite quelconque *FGg* qui contient deux élémens correſpondans *GV*, *gu* des deux ſecteurs correſpondans, & qui eſt perpendiculaire à l'équateur commun, ſoit mené un plan *CKI* ou *CKi*: ce plan qui rencontrera le même équateur en *CK* lui ſera perpendiculaire : & ſi par le point *i*, où ce plan rencontrera le bord du ſecteur d'ellipſoïde, on mène *iK* parallèlement à *FGg*, cette ligne ſera auſſi perpendiculaire à l'équateur, & contiendra deux élémens correſpondans *KI*, *Ki* de la ſphère & de l'ellipſoïde.

Deux élémens ou filets correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde étant proportionnels à deux autres élémens ou filets correſpondans des mêmes ſolides, on aura $FG : Fg :: KI : Ki$.

Mais les droites parallèles KIi, FVu étant compriſes dans le même triangle KCI ou KCi, ſeront coupées proportionnellement par la droite Cui ou CVI, dans laquelle le plan de ce triangle rencontrera la ſurface conique du ſecteur ſphérique ou elliptique. Ainſi l'on aura $KI : Ki :: FV : Fu$.

On aura donc $FG : Fg :: FV : Fu$, & par conſéquent $FG - FV : Fg - Fu :: FG : Fg$, ou $GV : gu :: FG : Fg$; c'eſt-à-dire que deux élémens ou filets correſpondans des ſecteurs correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont proportionnels à deux élémens correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde, & par conſéquent auſſi proportionnels à l'axe DE de l'équateur commun & à l'autre axe $2Ca$ de l'ellipſoïde : d'où il ſuit néceſſairement que

La ſomme des élémens ou filets qui compoſent le ſecteur ſphérique, c'eſt-à-dire, le ſolide de ce ſecteur,

Eſt à la ſomme des filets qui compoſent le ſecteur correſpondant d'ellipſoïde, ou au ſolide de ce ſecteur;

Comme l'axe DE *de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde,*

Eſt à l'autre axe 2Ca *de l'ellipſoïde.*

COROLLAIRE VII.

Fig. 86 & 87. 134. Si l'on conſidère les momens des élémens ou filets correſpondans $\left\{\begin{matrix} GX, gx \text{ des ſegmens} \\ GV, gu \text{ des ſecteurs} \end{matrix}\right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde par rapport à un même

plan BZ parallèle à ces élémens, & par conſéquent perpendiculaire ſur l'équateur commun à la ſphére & à l'ellipſoïde, on trouvera que ces momens ſont proportionnels aux deux axes DE & $2Ca$.

Car les milieux ou centres de gravité des élémens correſpondans $\{{CX, gx \text{ des ſegmens} \atop CV, gu \text{ des ſecteurs}}\}$ correſpondans ſeront à la même diſtance du plan BZ. Ainſi les momens de ces élémens, c'eſt-à-dire, les produits de leurs longueurs & de leurs diſtances au plan BZ, ſeront proportionnels à leurs longueurs qui ſont elles-mêmes proportionnelles aux deux axes DE, $2Ca$: & comme il y a même nombre d'élémens dans les deux ſegmens ou ſecteurs correſpondans, on aura cette proportion :

La ſomme des momens de tous les élémens du ſegment ou du ſecteur ſphérique, c'eſt-à-dire, le moment de ce ſegment ou de ce ſecteur conſidéré par rapport au plan BZ *perpendiculaire à l'équateur commun,*

Eſt à la ſomme des momens de tous les élémens du ſegment ou du ſecteur correſpondant d'ellipſoïde, c'eſt-à-dire, au moment de ce ſegment ou de ce ſecteur, relativement au même plan ;

Comme l'axe DE *de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde,*

Eſt à l'autre axe 2Ca *de l'ellipſoïde.*

COROLLAIRE VIII.

135. Mais ſi l'on conſidère les momens des élémens ou filets correſpondans $\{{CX, gx \text{ des ſegmens} \atop CV, gu \text{ des ſecteurs}}\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde par rapport à l'équateur $DMEND$ commun à la ſphère & à Fig. 86 & 87.

l'ellipſoïde, on trouvera que ces momens ſont proportionnels aux quarrés $\overline{DE}^2$ & $(2Ca)^2$ de l'axe de l'équateur commun & de l'autre axe de l'ellipſoïde.

Car on a trouvé $\begin{cases} (n.^o 132)\ FG : Fg :: GX : gx :: \frac{1}{2}GX : \frac{1}{2}gx \\ (n.^o 133)\ FG : Fg :: GV : gu :: \frac{1}{2}GV : \frac{1}{2}gu \end{cases}$

Ainſi $\begin{cases} FG - \frac{1}{2}GX : Fg - \frac{1}{2}gx \\ FG - \frac{1}{2}GV : Fg - \frac{1}{2}gu \end{cases} :: FG : Fg$ ou $:: DE : 2Ca.$

Multipliant ces proportions par ordre avec celles-ci $\begin{cases} GX : gx \\ GV : gu \end{cases} :: DE : 2Ca,$

chacune par ſa correſpondante,

on aura $\begin{cases} GX \times (FG - \frac{1}{2}GX) : gx \times (Fg - \frac{1}{2}gx) \\ GV \times (FG - \frac{1}{2}GV) : gu \times (Fg - \frac{1}{2}gu) \end{cases} :: \overline{DE}^2 : (2Ca)^2$

Or $\begin{cases} FG - \frac{1}{2}GX,\ Fg - \frac{1}{2}gx \\ FG - \frac{1}{2}GV,\ Fg - \frac{1}{2}gu \end{cases}$ ſont les diſtances de l'équateur commun $DMEND$ aux milieux ou centres de gravité des élémens correſpondans $\begin{cases} GX, gx \text{ des ſegmens} \\ GV, gu \text{ des ſecteurs} \end{cases}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde.

Ainſi $\begin{cases} GX \times (FG - \frac{1}{2}GX) \text{ \& } gx \times (Fg - \frac{1}{2}gx) \\ GV \times (FG - \frac{1}{2}GV) \text{ \& } gu \times (Fg - \frac{1}{2}gu) \end{cases}$ ſont les momens des élémens correſpondans $\begin{cases} GX, gx \text{ des ſegmens} \\ GV, gu \text{ des ſecteurs} \end{cases}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde; & par conſéquent les momens des élémens ou filets correſpondans $\begin{cases} GX, gx \text{ des ſegmens} \\ GV, gu \text{ des ſecteurs} \end{cases}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde, étant conſidérés par rapport à l'équateur commun $DMEND$, ſont proportionnels aux quarrés $\overline{DE}^2$, $(2Ca)^2$ de l'axe de l'équateur commun & de l'autre axe de l'ellipſoïde.

Enfin comme ces deux ſegmens ou ſecteurs correſpondans ſont compoſés d'un même nombre d'élémens proportionnels chacun à ſon correſpondant, on aura cette proportion :

La ſomme des momens de tous les élémens ou filets qui compoſent le ſegment ou le ſecteur ſphérique, c'eſt-à-dire, le moment de ce ſegment ou de ce ſecteur relativement à l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde,

Eſt à la ſomme des momens de tous les élémens du ſegment ou du ſecteur correſpondant d'ellipſoïde, c'eſt-à-dire, au moment de ce ſegment ou de ce ſecteur par rapport au même équateur;

Comme le quarré $\overline{DE}^2$ *de l'axe de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde,*

Eſt au quarré $(2Ca)^2$ *de l'autre axe de l'ellipſoïde.*

REMARQUE.

136. On remarquera que ſi l'on coupoit la ſphère & l'ellipſoïde par un plan parallèle à leur axe de révolution ou perpendiculaire à l'équateur commun de ces deux ſolides, la ſection *MgN* de l'ellipſoïde ſeroit une ellipſe correſpondante à la ſection circulaire *MGN* de la ſphère. Car les ordonnées *RO, FG, &c.* menées dans le plan circulaire de la ſection *MGN* de la demi-ſphère, perpendiculairement à la rencontre *MN* de ce plan avec celui de l'équateur, étant perpendiculaires à cet équateur & terminées par la ſurface de la ſphère, ſeront des ordonnées de la ſphère; & les ordonnées correſpondantes *Ro, Fg, &c.* de la ſection *MgN* de l'ellipſoïde étant terminées par ſa ſurface, ſeront des ordonnées de ce ſolide: & comme toutes les ordonnées de la ſphère ſont proportionnelles aux ordonnées correſpondantes de l'ellipſoïde, il eſt clair que les ordonnées *RO, FG, &c.* du demi-cercle *MGN* ſeront proportionnelles aux ordonnées *Ro, Fg, &c.* de la courbe *MgN*. Ainſi (*n.° 106*) la Fig. 86 & 87.

courbe *MgN* eſt une demi-ellipſe, & la ſection entière de l'ellipſoïde eſt une ellipſe.

THEOREME.

Fig. 86 & 87. 137. *Les centres de gravité* {H, h *de deux ſegmens* / L, l *de deux ſecteurs*} *correſpondans de ſphère & d'ellipſoïde ſont dans une même droite* {Q H h / S L l} *perpendiculaire à l'équateur* DMEND *commun à la ſphère & à l'ellipſoïde.*

DÉMONSTRATION.

En conſidérant les momens des ſegmens & ſecteurs correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde relativement à un même plan *BZ* perpendiculaire à l'équateur commun, on a trouvé *(n.° 134)* que

Le moment du ſegment ou du ſecteur ſphérique
Eſt au moment du ſegment ou ſecteur correſpondant d'ellipſoïde,
Comme l'axe DE *de l'équateur commun*
Eſt à l'autre axe 2Ca *de l'ellipſoïde.*

On a trouvé auſſi *(n.os 132 & 133)* que

Le ſegment ou ſecteur de la ſphère
Eſt au ſegment ou ſecteur correſpondant de l'ellipſoïde,
Comme l'axe DE *de l'équateur commun*
Eſt à l'autre axe 2Ca *de l'ellipſoïde.*

Ainſi en diviſant ces deux proportions par ordre, on aura

Le moment du ſegment ou ſecteur ſphérique, diviſé par ce ſegment ou par ce ſecteur,
Eſt au moment du ſegment ou ſecteur correſpondant d'ellipſoïde, diviſé par ce ſegment ou par ce ſecteur,

Comme l'axe DE *de l'équateur commun, diviſé par lui-même, c'eſt-à-dire, comme l'unité,*

Eſt à l'autre axe 2Ca *de l'ellipſoïde, diviſé par lui-même, ou à l'unité.*

Or les deux derniers termes de cette proportion étant égaux, les deux premiers le ſont auſſi.

Mais *(n.° 61)* le premier terme, c'eſt-à-dire, le moment du ſegment ou du ſecteur ſphérique, diviſé par ce ſegment ou par ce ſecteur, eſt la diſtance du centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur au plan *BZ* relativement auquel on a conſidéré ce moment; & le ſecond terme, ſavoir, le moment du ſegment ou du ſecteur d'ellipſoïde, diviſé par ce ſegment ou par ce ſecteur, eſt la diſtance du centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur au même plan *BZ* par rapport auquel on a auſſi conſidéré ce moment.

Donc les centres de gravité $\left\{\begin{matrix} H, h \text{ des ſegmens} \\ L, l \text{ des ſecteurs} \end{matrix}\right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont à la même diſtance du plan *BZ* perpendiculaire à l'équateur commun, & ſont par conſéquent dans un même plan parallèle à ce plan *BZ* ou perpendiculaire à l'équateur commun.

On démontrera de la même manière que les mêmes centres de gravité $\left\{\begin{matrix} H, h \text{ des ſegmens} \\ L, l \text{ des ſecteurs} \end{matrix}\right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont dans un ſecond plan parallèle à un nouveau plan *BZ* perpendiculaire à l'équateur, & ſont par conſéquent dans un ſecond plan perpendiculaire au même équateur.

Donc les centres de gravité $\left\{\begin{matrix} H, h \text{ des ſegmens} \\ L, l \text{ des ſecteurs} \end{matrix}\right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont dans la ſection commune de deux plans perpendiculaires à l'équateur, & ſe trouvent par conſéquent dans une

même droite $\left\{\begin{matrix} Q & H & h \\ S & L & l \end{matrix}\right\}$ perpendiculaire sur l'équateur commun à la sphère & à l'ellipsoïde. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

138. Donc si l'on veut avoir une ligne droite qui contienne le centre de gravité d'un segment ou d'un secteur quelconque d'ellipsoïde, il faudra imaginer ou construire une sphère qui ait un équateur commun avec cet ellipsoïde; puis par le moyen de quelques perpendiculaires tirées par le bord du segment ou du secteur sur l'équateur commun, déterminer sur la sphère le segment ou le secteur correspondant à celui de l'ellipsoïde; chercher ensuite *(n.° 102 ou 98)* le centre de gravité de ce segment ou de ce secteur sphérique; & mener enfin par ce centre de gravité sur l'équateur commun une perpendiculaire indéfinie qui contiendra nécessairement le centre de gravité demandé du segment ou du secteur d'ellipsoïde.

THEOREME.

Fig. 86 & 87.

139. *Si par le centre de gravité* $\left\{\begin{matrix} H \\ L \end{matrix}\right\}$ *du* $\left\{\begin{matrix} \text{segment} \\ \text{secteur} \end{matrix}\right\}$ *sphérique on mène une droite indéfinie* $\left\{\begin{matrix} Q & H & h \\ S & L & l \end{matrix}\right\}$ *perpendiculairement sur l'équateur commun à la sphère & à l'ellipsoïde, & qu'on prenne sur cette perpendiculaire, à commencer de l'équateur commun, une partie* $\left\{\begin{matrix} Q & h \\ S & l \end{matrix}\right\}$ *telle que l'on ait cette proportion* $\left\{\begin{matrix} QH : Qh \\ SL : Sl \end{matrix}\right\}$ :: DE : 2Ca; *le point* $\left\{\begin{matrix} h \\ l \end{matrix}\right\}$ *sera le centre de gravité du* $\left\{\begin{matrix} \text{segment} \\ \text{secteur} \end{matrix}\right\}$ *correspondant de l'ellipsoïde.*

DÉMONSTRATION.

On vient de démontrer que les centres de gravité $\left\{\begin{matrix} H, h \\ L, l \end{matrix}\right\}$ de deux $\left\{\begin{matrix} \text{segmens} \\ \text{secteurs} \end{matrix}\right\}$ correſpondans ſont dans une même droite $\left\{\begin{matrix} QHh \\ SLl \end{matrix}\right\}$ menée perpendiculairement ſur l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde. Ainſi il reſte ſeulement à démontrer que le centre de gravité $\left\{\begin{matrix} h \text{ du ſegment} \\ l \text{ du ſecteur} \end{matrix}\right\}$ d'ellipſoïde eſt placé dans la droite $\left\{\begin{matrix} QHh \\ SLl \end{matrix}\right\}$ de manière que $\left\{\begin{matrix} QH : Qh \\ SL : Sl \end{matrix}\right\} :: DE : 2Ca.$

En conſidérant les momens des ſegmens & des ſecteurs correſpondans de ſphère & d'ellipſoïde relativement à l'équateur $DMEND$ commun à la ſphère & à l'ellipſoïde, on a trouvé *(n.° 135)* que

Le moment du ſegment ou du ſecteur de la ſphère
Eſt au moment du ſegment ou du ſecteur correſpondant de l'ellipſoïde,

Comme le quarré $\overline{\text{DE}}^2$ *de l'axe de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde,*
Eſt au quarré $(2\text{Ca})^2$ *de l'autre axe de l'ellipſoïde.*

On a vû auſſi *(n.os 132 & 133)* que

Le ſegment ou le ſecteur ſphérique
Eſt au ſegment ou au ſecteur correſpondant d'ellipſoïde,
Comme l'axe DE *de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde,*
Eſt à l'autre axe 2Ca *de l'ellipſoïde.*

Ainſi en diviſant par ordre la première de ces deux proportions par la ſeconde, on aura cette nouvelle proportion :

Le moment du ſegment ou du ſecteur de la ſphère, diviſé par ce ſegment ou par ce ſecteur, c'eſt-à-dire, la diſtance HQ *ou* LS *du centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur au plan de l'équateur commun, relativement auquel on conſidère les momens,*

Eſt au moment du ſegment ou du ſecteur correſpondant de l'ellipſoïde, diviſé par ce ſegment ou par ce ſecteur, c'eſt-à-dire, à la diſtance hQ *ou* lS *du centre de gravité de ce ſegment ou de ce ſecteur au même équateur commun;*

Comme $\overline{DE}^2$ *diviſé par* DE, *ou comme* DE,
Eſt à $(2Ca)^2$ *diviſé par* 2Ca, *c'eſt-à-dire, à* 2Ca. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 86 & 87. 140. Puiſque les centres de gravité $\left\{\begin{smallmatrix} H, h \text{ des ſegmens} \\ L, l \text{ des ſecteurs} \end{smallmatrix}\right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont ſitués dans une même droite $\left\{\begin{smallmatrix} QHh \\ SLl \end{smallmatrix}\right\}$ perpendiculaire à l'équateur commun, de manière que $\left\{\begin{smallmatrix} QH : Qh \\ SL : Sl \end{smallmatrix}\right\} :: DE : 2Ca$; il eſt évident que ſi $\left\{\begin{smallmatrix} QH \\ SL \end{smallmatrix}\right\}$ devient nul, c'eſt-à-dire, ſi le centre de gravité $\left\{\begin{smallmatrix} H \text{ du ſegment} \\ L \text{ du ſecteur} \end{smallmatrix}\right\}$ ſphérique ſe confond avec le point $\left\{\begin{smallmatrix} Q \\ S \end{smallmatrix}\right\}$ de l'équateur commun, le terme $\left\{\begin{smallmatrix} Qh \\ Sl \end{smallmatrix}\right\}$ deviendra auſſi nul; c'eſt-à-dire que le centre de gravité $\left\{\begin{smallmatrix} h \text{ du ſegment} \\ l \text{ du ſecteur} \end{smallmatrix}\right\}$ correſpondant de l'ellipſoïde ſe confondra avec le même point $\left\{\begin{smallmatrix} Q \\ S \end{smallmatrix}\right\}$ du plan de l'équateur. Ainſi les centres de gravité $\left\{\begin{smallmatrix} H, h \text{ des ſegmens} \\ L, l \text{ des ſecteurs} \end{smallmatrix}\right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſeront dans un même point de l'équateur commun.

COROLLAIRE II.

141. Lorſque les bords *GMFNG*, *gMfNg* des {segmens / ſecteurs} correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont dans un même plan perpendiculaire à celui de l'équateur commun, le {ſegment / ſecteur} ſphérique eſt coupé en deux parties égales & ſemblables par le plan de l'équateur; ainſi ſon centre de gravité eſt dans ce plan. Donc *(n.° 140)* dans ce cas les deux {ſegmens / ſecteurs} correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde auront le même centre de gravité. Fig. 88 & 89.

Ainſi quand on voudra déterminer le centre de gravité d'un {ſegment / ſecteur} d'ellipſoïde dont le bord *gMfNg* ſera dans un plan perpendiculaire ſur l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde, il faudra chercher le centre de gravité {Q du ſegment / S du ſecteur} ſphérique correſpondant dont le bord *GMFNG* ſera néceſſairement dans un même plan perpendiculaire à l'équateur avec celui du {ſegment / ſecteur} d'ellipſoïde; & ce centre de gravité {Q du ſegment / S du ſecteur} ſphérique ſera celui du {ſegment / ſecteur} correſpondant de l'ellipſoïde.

Mais *(n.os 102, 98)* on trouvera le centre de gravité {Q du ſegment / S du ſecteur} ſphérique, en faiſant $\left\{\begin{array}{l} CQ = \frac{\frac{1}{4}\overline{PD}^2}{CD - \frac{1}{3}PD} \\ CS = \frac{3}{8}PE. \end{array}\right\}$

Ainſi l'on aura le centre de gravité {Q du ſegment / S du ſecteur} correſpondant d'ellipſoïde par le même moyen.

Et comme les lignes $\left\{\begin{array}{l} CD, PD \\ PE \end{array}\right\}$ qui entrent dans la valeur de la diſtance $\left\{\begin{array}{l} CQ \\ CS \end{array}\right\}$ du centre de la ſphère au centre de gravité {Q du ſegment / S du ſecteur} ſphérique, ſont communes

à la ſphère & à l'ellipſoïde, il eſt évident qu'on trouvera le centre de gravité du {segment / secteur} d'ellipſoïde dont le bord eſt dans un plan perpendiculaire à celui de l'équateur commun, ſans avoir recours au {segment / secteur} ſphérique correſpondant.

COROLLAIRE III.

Fig. 90 & 91. **142.** Lorſque les bords *OPY, opy* des {segmens / secteurs} correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont dans des plans parallèles au plan *DMEND* de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde, ces {segmens / secteurs} correſpondans peuvent être engendrés par la révolution des {demi-ſegmens *AOQ, aoq* / ſecteurs *ACO, aCo*} correſpondans du cercle & de l'ellipſe autour de l'axe *AB* ou *ab* perpendiculaire à l'équateur commun. Ainſi il eſt évident que les centres de gravité {*H, h* de ces ſegmens / *L, l* de ces ſecteurs} correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont dans le même axe *AB* ou *ab* de révolution, & que *(n.° 139)* ils ſont placés dans cet axe de manière que

$$\left\{\begin{matrix} CH : Ch \\ CL : Cl \end{matrix}\right\} :: DE : ab, \text{ ou } :: CA : Ca.$$

COROLLAIRE IV.

Fig. 90 & 91. **143.** Si l'on décrit un cercle *aFbGa* qui ait pour diamètre l'axe *ab* ſur lequel la demi-ellipſe *aDb* a tourné pour engendrer l'ellipſoïde, la circonférence de ce cercle ſera rencontrée en *V* par l'ordonnée *qo* de l'ellipſe, prolongée s'il eſt néceſſaire, & les trois points *C, V, O* ſeront en ligne droite.

Car *RO, Ro* étant des ordonnées correſpondantes du cercle *ADBEA* & de l'ellipſe *aDbEa*, on aura *(n.° 106* ou *107) RO : Ro* ou *CQ : Cq :: DE : ab.*

Et *qo, qV* étant auſſi des ordonnées correſpon-

dantes de l'ellipſe $aDbEa$ & du cercle $aVbXa$, on aura (n.° 106 ou 107) $DE : ab :: qo : qV$, ou $:: QO : qV$.

On aura donc $CQ : Cq :: QO : qV$. Ainſi les triangles GQO, CqV ſeront ſemblables : ce qui ne peut arriver que dans le cas où les trois points C, V, O ſont en ligne droite.

Les trois points C, V, O étant en ligne droite, les $\left\{\begin{matrix}\text{demi-segmens}\\ \text{secteurs}\end{matrix}\right.$ $\begin{matrix}AOQ, aVq\\ ACO, aCV\end{matrix}$ des deux cercles $ADBEA$, $aVbXa$ ſeront ſemblables, & décriront par conſéquent dans leur révolution ſur l'axe AB ou ab des $\left\{\begin{matrix}\text{segmens}\\ \text{secteurs}\end{matrix}\right\}$ ſemblables de ſphères dont les centres de gravité ſeront ſemblablement placés dans leurs rayons CA, Ca; c'eſt-à-dire qu'en prenant $\left\{\begin{matrix}H, I\\ L, K\end{matrix}\right\}$ pour les centres de gravité de ces deux $\left\{\begin{matrix}\text{segmens}\\ \text{secteurs}\end{matrix}\right\}$ ſphériques, on aura $\left\{\begin{matrix}CH : CI\\ CL : CK\end{matrix}\right\} :: CA : Ca$.

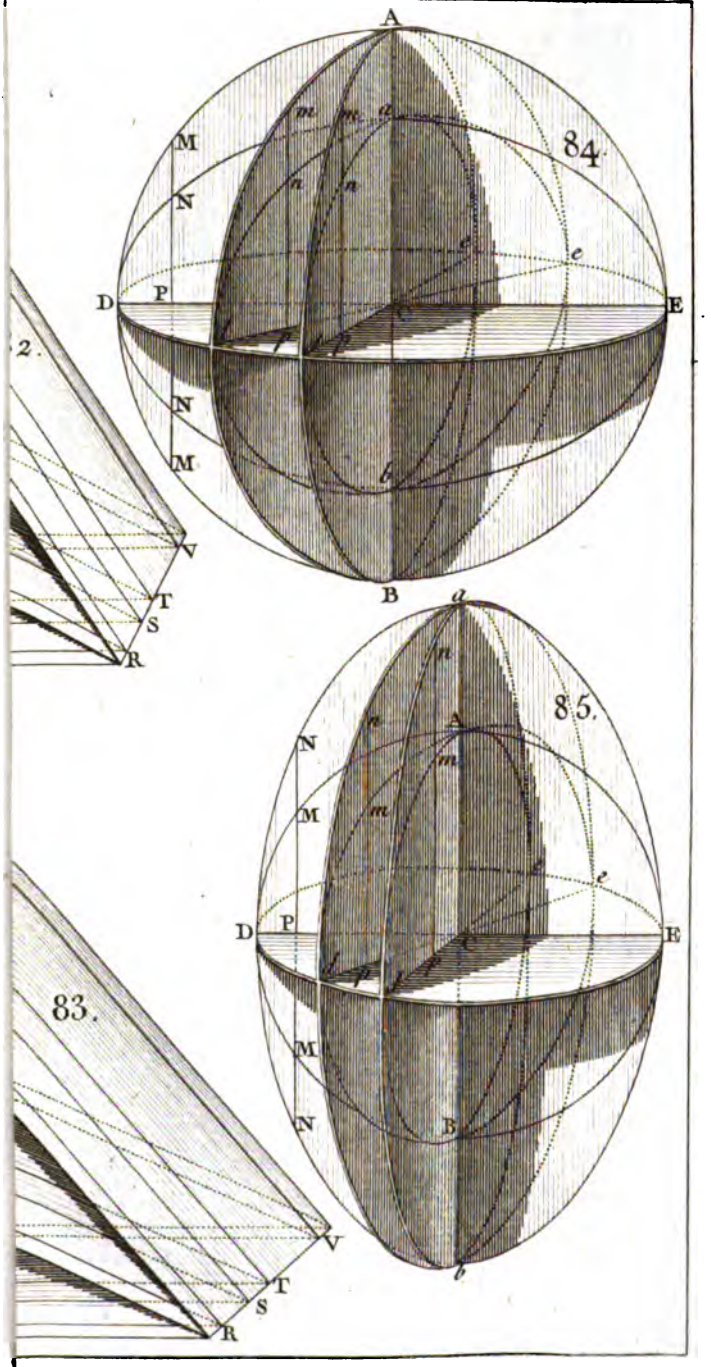
Mais on a trouvé dans le Corollaire précédent que les centres de gravité $\left\{\begin{matrix}H, h \text{ des ſegmens}\\ L, l \text{ des ſecteurs}\end{matrix}\right\}$ correſpondans de la ſphère & de l'ellipſoïde ſont placés dans le même axe AB ou ab de révolution, de manière que $\left\{\begin{matrix}CH : Ch\\ CL : Cl\end{matrix}\right\} :: CA : Ca$.

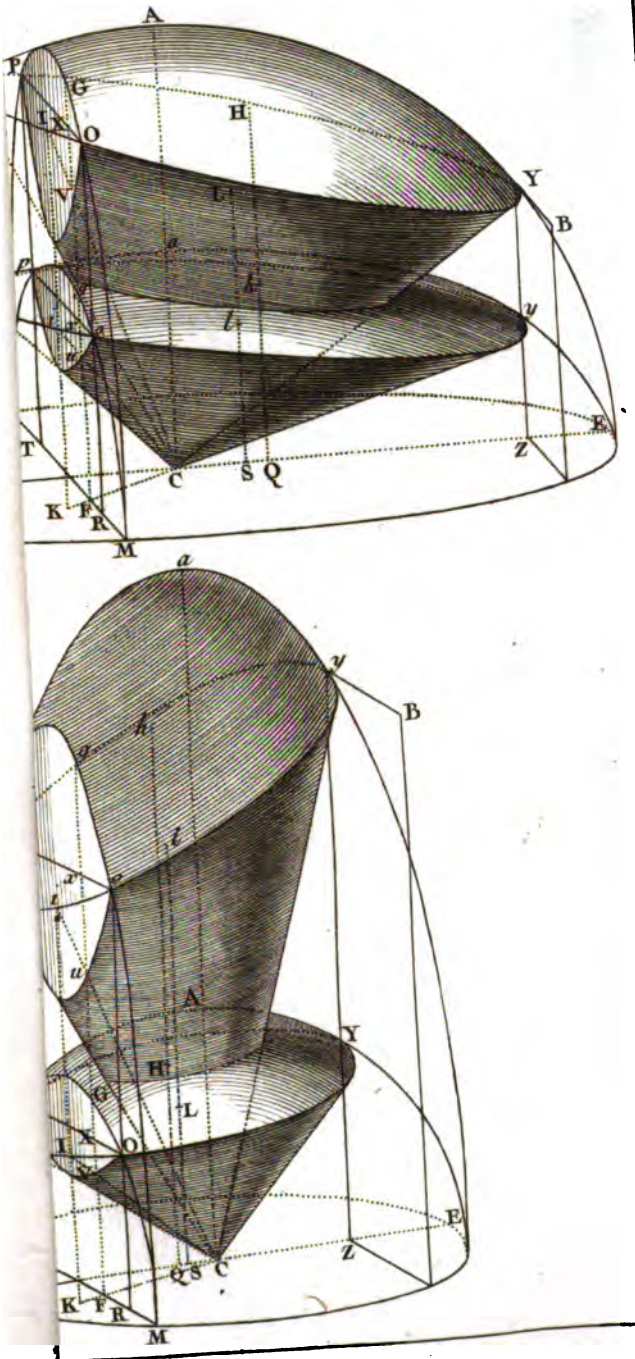
Donc $\left\{\begin{matrix}CH : CI :: CH : Ch\\ CL : CK :: CL : Cl\end{matrix}\right\}$: & comme les antécédens de ces proportions ſont égaux, les conſéquens le ſeront auſſi; c'eſt-à-dire qu'on aura $\left\{\begin{matrix}CI = Ch\\ CK = Cl\end{matrix}\right\}$: d'où il ſuit que le centre de gravité $\left\{\begin{matrix}I \text{ du ſegment}\\ K \text{ du ſecteur}\end{matrix}\right\}$ ſphérique qui a même flèche aq & même axe ab de révolution que le $\left\{\begin{matrix}\text{ſegment}\\ \text{ſecteur}\end{matrix}\right\}$ d'ellipſoïde, ſe confond avec le centre de gravité $\left\{\begin{matrix}h \text{ de ce ſegment}\\ l \text{ de ce ſecteur}\end{matrix}\right\}$ d'ellipſoïde.

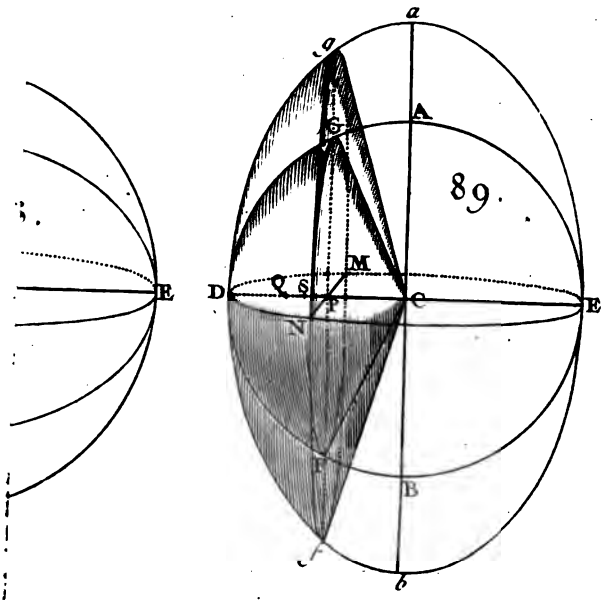
Or (*n.os* $\frac{102}{98}$) on trouvera le centre de gravité $\left\{\begin{matrix}I \text{ du segment}\\K \text{ du secteur}\end{matrix}\right\}$ sphérique engendré par le $\left\{\begin{matrix}\text{demi-segment}\\\text{secteur}\end{matrix}\right.$ $\left.\begin{matrix}aVq\\aCV\end{matrix}\right\}$ de cercle, en faisant $\left\{\begin{matrix}CI = \frac{\frac{1}{4}\overline{aq}^2}{Ca - \frac{1}{3}aq}\\CK = \frac{3}{8}bq\end{matrix}\right\}$; ainsi l'on aura le centre de gravité $\left\{\begin{matrix}I \text{ ou } k \text{ du segment}\\K \text{ ou } I \text{ du secteur}\end{matrix}\right\}$ d'ellipsoïde, engendré par la révolution du $\left\{\begin{matrix}\text{demi-segment}\\\text{secteur}\end{matrix}\right.$ $\left.\begin{matrix}aeq\\aCe\end{matrix}\right\}$ correspondant de l'ellipse, par le même moyen.

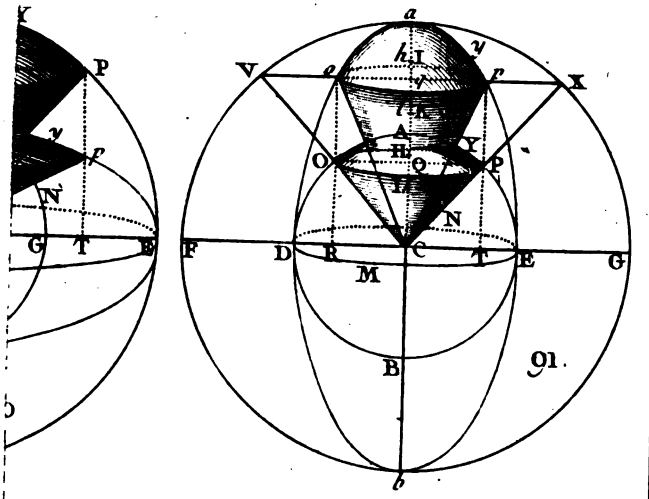
Et comme les lignes $\left\{\begin{matrix}Ca, aq\\bq\end{matrix}\right\}$ qui entrent dans la valeur de la distance du centre C de la sphère au centre de gravité $\left\{\begin{matrix}I \text{ ou } k \text{ du segment}\\K \text{ ou } I \text{ du secteur}\end{matrix}\right\}$ sphérique, sont communes à la sphère & à l'ellipsoïde, & aux parties correspondantes de ces deux solides; il est évident qu'on trouvera le centre de gravité du $\left\{\begin{matrix}\text{segment}\\\text{secteur}\end{matrix}\right\}$ d'ellipsoïde, engendré par la révolution d'un $\left\{\begin{matrix}\text{demi-segment}\\\text{secteur}\end{matrix}\right.$ $\left.\begin{matrix}aeq\\aCe\end{matrix}\right\}$ d'ellipse sur l'un ab de ses axes, sans avoir recours au $\left\{\begin{matrix}\text{segment}\\\text{secteur}\end{matrix}\right\}$ sphérique correspondant.

CHAPITRE VIII.


A
M
N
P
D
E
B
84.
85.
83.
V
T
S
R
a
b
e
m
n


A
F
G
H
I
X
O
Y
B
V
L
a
p
k
l
y
E
T
Z
C
S
Q
K
F
R
M
a
y
B
g
k
l
d
e
u
A
Y
H
G
L
I
X
O
E
Z
C
Q
S
K
F
R
M


a
g
A
89.
M
D
E
C
N
B
b


a
V
X
O
P
F
D
C
E
G
M
N
B
91.
b

CHAPITRE VIII.

Du centre de gravité de la Parabole & du Paraboloïde.

DÉFINITIONS.

144. SOIENT deux droites indéfinies BZ, Ee qui se coupent perpendiculairement en A, & soit fait AB de telle grandeur qu'on voudra. Fig. 92.

Que l'on décrive avec des rayons plus grands que la moitié de AB, tant de cercles $BCPc$, $BDQd$, $BERe$ qu'on voudra, lesquels ayent leurs centres dans la droite BZ, & qui passent tous par le même point B: chacune des circonférences coupera la droite Ee en deux points; savoir, la première en C, c, la seconde en D, d, la troisième en E, e.

Maintenant si par les points P, Q, R, *&c.* où les mêmes circonférences coupent la droite AZ, on tire les droites Mm, Nn, Oo, *&c.* parallèles à Ee, c'est-à-dire, perpendiculaires sur BZ, & que l'on fasse PM & $Pm = AC$, QN & $Qn = AD$, RO & $Ro = AE$, *&c.* la courbe $ONMAmno$ qui passera par le point A & par tous les points O, N, M, m, n, o sera nommée *Parabole*, & le point A s'appellera *Sommet* de la parabole.

La droite AZ se nommera *Axe* de la parabole.

Les droites MP, NQ, OR, *&c.* s'appelleront *Ordonnées* ou *Appliquées* des points M, N, O, *&c.* & les droites AP, AQ, AR, *&c.* se nommeront *Abscisses* ou *Coupées* des mêmes points M, N, O, *&c.* de la parabole.

La droite AB ſe nommera *Paramètre.*

Une *Abſciſſe* AR & une ordonnée RO d'un même point O s'appellent *Coordonnées.*

COROLLAIRE I.

Fig. 92. 145. 1.° Donc le quarré de l'ordonnée d'un point quelconque de la parabole eſt égal au produit de ſon abſciſſe & du paramètre.

Car $\overline{PM}^2$ ou $\overline{AC}^2 = AP \times AB$

$\overline{QN}^2$ ou $\overline{AD}^2 = AQ \times AB$

$\overline{RO}^2$ ou $\overline{AE}^2 = AR \times AB.$

2.° Donc l'abſciſſe d'un point quelconque eſt égale au quarré de ſon ordonnée, diviſé par le paramètre; c'eſt-à-dire, $AP = \frac{\overline{PM}^2}{AB}$, $AQ = \frac{\overline{QN}^2}{AB}$, $AR = \frac{\overline{RO}^2}{AB}$, *&c.*

COROLLAIRE II.

Fig. 92. 146. Donc les quarrés des ordonnées PM, QN, RO, *&c.* de la parabole, ſont proportionnels aux abſciſſes AP, AQ, AR, *&c.* de ces ordonnées.

Car puiſque *(n.° 145)* $\begin{cases} \overline{PM}^2 = AP \times AB \\ \overline{QN}^2 = AQ \times AB \\ \overline{RO}^2 = AR \times AB \end{cases}$, on aura

$\overline{PM}^2 : \overline{QN}^2 : \overline{RO}^2 :: AP \times AB : AQ \times AB : AR \times AB :: AP : AQ : AR.$

THEOREME.

Fig. 92. 147. *Si par le ſommet* A. *de la parabole on mène une perpendiculaire* Ee *à l'axe* AZ, *& que par deux points quelconques* M, N *de la parabole, infiniment près*

l'un de l'autre, on tire deux ordonnées MP, NQ *perpendiculaires à l'axe, & deux autres droites* MC, ND *perpendiculaires à la droite* Ee, *le petit eſpace* PMNQ *ſera double du petit eſpace* CMND.

DÉMONSTRATION.

Les points *M, N* étant infiniment proches, le petit arc *MN* de la parabole pourra être regardé comme une ligne droite; & ſi par le milieu *H* de cette petite droite on mène *HK* perpendiculaire à *AZ*, & *HI* perpendiculaire à *Ee*, on aura l'eſpace $PMNQ = HK \times PQ$. & l'eſpace $CMND = HI \times CD$. Il faut donc démontrer que $HK \times PQ = 2\,HI \times CD$.

$$AQ \times AB = \overline{QN}^2;\quad AP \times AB = \overline{PM}^2.$$

Ainſi $(AQ - AP) \times AB$ ou $PQ \times AB = \overline{QN}^2 - \overline{PM}^2$.

Mais $\overline{QN}^2 - \overline{PM}^2 = (QN + PM) \times (QN - PM)$.

Donc $PQ \times AB = (QN + PM) \times (QN - PM) = 2\,HK \times CD$.

Multipliant par *HK*, & diviſant enſuite par *AB*, on aura $PQ \times HK = \frac{2\,\overline{HK}^2 \times CD}{AB}$.

Mais $\overline{HK}^2 = AK \times AB$; & par conſéquent $\frac{\overline{HK}^2}{AB} = AK = HI$ ou $\frac{2\,\overline{HK}^2}{AB} = 2\,HI$.

Donc $PQ \times HK = 2\,HI \times CD$; c'eſt-à-dire que le petit trapèze *PMNQ* compris dans la parabole, eſt double du petit trapèze correſpondant *CMND* extérieur à la parabole. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

148. Donc un eſpace quelconque *ARO* compris entre l'arc *AO* de parabole, l'ordonnée *RO* & Fig. 92.

l'abſciſſe AR, eſt double de l'eſpace correſpondant AEO; & comme les deux eſpaces ARO, AEO compoſent enſemble un rectangle égal au produit $AR \times RO$, l'eſpace parabolique ARO ſera les deux tiers du produit $AR \times RO$.

Car ſi l'on imagine que les eſpaces ARO, AEO ſont compoſés d'une infinité de petits trapèzes tels que $PMNQ$ & $CMND$ correſpondans chacun à chacun, chaque petit trapèze $PMNQ$ de l'eſpace ARO ſera double de chaque petit trapèze correſpondant $CMND$ de l'eſpace AEO. Ainſi la ſomme des petits trapèzes $PMNQ$, c'eſt-à-dire, l'eſpace ARO, ſera double de la ſomme des petits trapèzes $CMND$, c'eſt-à-dire, de l'eſpace AEO; & par conſéquent l'eſpace parabolique ARO ſera les deux tiers du rectangle RE ou du produit $AR \times RO$.

Comme on aura auſſi l'eſpace ARo double de l'eſpace Aeo, & par conſéquent l'eſpace ARo égal aux deux tiers du rectangle $ARoe$, il eſt clair que l'eſpace OAo compris entre la parabole & une corde Oo perpendiculaire à l'axe, eſt les deux tiers du rectangle $EOoe$ ou du produit $AR \times Oo$.

REMARQUE.

Fig. 93. 149. Lorſqu'une parabole OaB eſt coupée par une corde Oo oblique à ſon axe aZ, & que l'on mène par le milieu R de cette corde une droite AR parallèle à l'axe aZ, on démontre dans les Traités des ſections coniques que toutes les cordes Mm, Nn de la parabole, qui ſont parallèles à Oo, ſont coupées en deux parties égales par la droite AR qu'on nomme le *Diamètre* de ces cordes, en ſorte que le ſegment parabolique Oao eſt coupé en deux parties

égales, mais non ſemblables, par le diamètre *AR*.

On démontre encore dans les mêmes traités, qu'après avoir tiré, par l'extrémité *A* du diamètre *AR*, une droite *EAe* parallèle à la corde *Oo*, ſi par deux points quelconques *M*, *N* de la parabole, on mène vers le diamètre *AR* deux droites *MP*, *NQ* parallèles à la corde *Oo*, & vers la droite *EAe* deux autres droites *MC*, *ND* parallèles au diamètre *AR*, le trapèze *PMNQ* ſera double du trapèze correſpondant *CMND*; d'où il ſuit que ſi l'on tire les droites *OE*, *oe* parallèles au diamètre *AR*, les aires des demi-ſegmens paraboliques égaux *ARO*, *ARo* ſeront doubles des triangles mixtilignes correſpondans *AEO*, *Aeo* extérieurs à la parabole, & ſeront par conſéquent les deux tiers des deux parallélogrammes égaux *AROE*, *ARoe*.

Comme ces propriétés (que nous avons démontrées pour les ſegmens paraboliques dont les cordes ſont perpendiculaires à l'axe de la parabole, & que nous ne démontrons point pour les ſegmens dont les cordes ſont obliques au même axe) ſuffiſent pour établir la théorie des centres de gravité de toutes ſortes de ſegmens paraboliques; les deux Théorèmes ſuivans ſeront relatifs à deux figures, l'une pour les ſegmens paraboliques dont les cordes ſeront perpendiculaires à l'axe de la parabole, l'autre pour les ſegmens dont les cordes ſeront obliques au même axe.

THEOREME.

150. *1.° Les momens des deux eſpaces paraboliques correſpondans* ARO, AEO *ſont égaux, lorſqu'on les conſidère par rapport à l'axe ou au diamètre* AR *de la parabole.* Fig. 92 & 93.

2.° Lorſque l'on conſidère les momens des mêmes eſpaces relativement à la droite AE *menée par le ſommet de la parabole parallèlement à la corde* Oo, *le moment de l'eſpace* ARO *eſt quadruple du moment de l'eſpace correſpondant* AEO.

DÉMONSTRATION.

Les côtés *PM, CM* des élémens correſpondans *PQNM, CMND* des deux eſpaces paraboliques *ARO, AEO* étant infiniment peu différens des côtés oppoſés *QN, DN* qui leur ſont parallèles, les centres de gravité *F, G* de ces deux élémens ſeront dans les milieux de leurs largeurs & de leurs longueurs moyennes *HK, HI.* Ainſi la diſtance *FK* du centre de gravité *F* à l'axe ou au diamètre *AR*, ſera la moitié de la diſtance *GL* du centre de gravité *G* au même axe ou diamètre; & réciproquement la diſtance *FV* du centre de gravité *F* à la droite *AE*, ſera double de la diſtance *GI* du centre de gravité *G* à la même droite *AE*; c'eſt-à-dire qu'on aura $\begin{cases} FK : GL :: 1 : 2 \\ FV : GI :: 2 : 1. \end{cases}$

Mais (*n.os 147 & 149*) l'élément *PQNM* eſt double de l'élément correſpondant *CMND*; c'eſt-à-dire que $PQNM : CMND :: 2 : 1$.

Donc ſi l'on multiplie cette dernière proportion par ordre avec chacune des deux précédentes, on aura

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ}\ PQNM \times FK : CMND \times GL :: 2 : 2 \\ 2.^{\circ}\ PQNM \times FV : CMND \times GI :: 4 : 1 \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} 1.^{\circ}\ PQNM \times FK = CMND \times GL \\ 2.^{\circ}\ PQNM \times FV = 4CMND \times GI; \end{array}\right.$$

C'eſt-à-dire que 1.° le moment de chaque élément *PQNM* de l'eſpace *ARO* relativement à l'axe ou au diamètre *AR*, eſt égal au moment de l'élément correſpondant *CMND* de l'autre eſpace parabolique;

& par conſéquent la ſomme des momens de tous les élémens qui compoſent l'eſpace parabolique *ARO*, ou le moment de cet eſpace par rapport à l'axe ou au diamètre *AB* de la parabole, eſt égale à la ſomme des momens de tous les élémens correſpondans qui compoſent l'eſpace *AEO*, ou au moment de cet eſpace relativement au même axe ou diamètre *AR*. *C. Q. F.* 1.° *D.*

2.° Le moment de chaque élément *PQNM* de l'eſpace *ARO* relativement à la droite *AE*, eſt quadruple du moment de l'élément correſpondant *CMND* par rapport à la même ligne; & par conſéquent la ſomme des momens de tous les élémens de l'eſpace *ARO*, ou le moment de cet eſpace relativement à la droite *AE*, eſt quadruple de la ſomme des momens des élémens de l'eſpace correſpondant *AEO* ou du moment de cet eſpace par rapport à la même ligne *AE*. *C. Q. F.* 2.° *D.*

THEOREME.

151. *La corde* Oo *étant coupée en deux parties égales par l'axe* AR *ou par le diamètre* AR *parallèle à l'axe* aZ *de la parabole, les droites* OE, oe *étant auſſi parallèles au même axe, & la droite* Ee *menée par l'extrémité* A *du diamètre ou de l'axe étant parallèle à la corde* Oo; *ſi des centres de gravité* P, S *des deux eſpaces paraboliques correſpondans* ARO, AEO *l'on mène des parallèles* PF, SH *à la corde* Oo, *& des parallèles* PI, SL *à l'axe de la parabole, on aura* Fig. 94 & 95.

1.° $PF = \frac{3}{8}RO$, $SH = \frac{3}{4}RO$

2.° $PI = \frac{3}{5}AR$, $SL = \frac{3}{10}AR$.

DÉMONSTRATION.

Du centre de gravité Q du rectangle $ARQE$ soit menée une parallèle QG à la corde Oo, & une parallèle QK à l'axe ou diamètre AR. La somme des momens des deux espaces paraboliques ARO, AEO qui composent le rectangle $ARQE$ étant égale au moment de ce rectangle;

1.° Si l'on considère relativement à l'axe AR les momens de ces espaces & du rectangle qui en est le système, on aura $ARO \times PF + AEO \times SH = AROE \times QG$. Mais on vient de voir que $ARO \times PF = AEO \times SH$, & par conséquent

$ARO \times PF + AEO \times SH = 2\,ARO \times PF$ ou $2\,AEO \times SH$.

Ainsi l'on aura $\left\{\begin{matrix} 2\,ARO \times PF \\ \text{ou } 2\,AEO \times SH \end{matrix}\right\} = AROE \times QG$.

Mais *(n.° 148)* $ARO = \frac{2}{3}\,AROE$, $AEO = \frac{1}{3}\,AROE$ ou $2\,ARO = \frac{4}{3}\,AROE$, $2\,AEO = \frac{2}{3}\,AROE$, & $QG = \frac{1}{2}\,RO$,

Donc $\left\{\begin{matrix} \frac{4}{3}\,AROE \times PF \\ \text{ou } \frac{2}{3}\,AROE \times SH \end{matrix}\right\} = AROE \times \frac{1}{2}\,RO$,

& $\left\{\begin{matrix} \frac{4}{3}\,PF \\ \text{ou } \frac{2}{3}\,SH \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\,RO$, ou $\left\{\begin{matrix} 4\,PF \\ \text{ou } 2\,SH \end{matrix}\right\} = \frac{3}{2}\,RO$;

d'où l'on déduira $PF = \frac{3}{8}\,RO$, & $SH = \frac{3}{4}\,RO$. *C. Q. F.* 1.° *D.*

2.° Si l'on considère par rapport à la droite AE les momens des mêmes espaces paraboliques ARO, AEO, & celui de leur système ou du rectangle $ARQE$, on aura

$ARO \times PI + AEO \times SL = AROE \times QK$.

Mais *(n.° 150)* $ARO \times PI = 4\,AEO \times SL$,

ou $ARO \times PI + AEO \times SL = \left\{\begin{matrix} 5\,AEO \times SL \\ \text{ou } \frac{5}{4}\,ARO \times PI \end{matrix}\right\}$.

Donc $\left\{\begin{matrix} 5\,AEO \times SL \\ \text{ou } \frac{5}{4}\,ARO \times PI \end{matrix}\right\} = AROE \times QK.$

Or $AEO = \frac{1}{3}\,AROE$, & $ARO = \frac{2}{3}\,AROE$; ou $5\,AEO = \frac{5}{3}\,AROE$, & $\frac{5}{4}\,ARO = \frac{5}{6}\,AROE$, & $QK = \frac{1}{2}\,AR$.

Donc $\left\{\begin{matrix} \frac{5}{3}\,AROE \times SL \\ \text{ou } \frac{5}{6}\,AROE \times PI \end{matrix}\right\} = AROE \times \frac{1}{2}\,AR$,

& $\left\{\begin{matrix} \frac{5}{3}\,SL \\ \text{ou } \frac{5}{6}\,PI \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\,AR$; d'où l'on tirera $SL = \frac{3}{10}\,AR$, & $PI = \frac{3}{5}\,AR$. *C. Q. F.* 2.° *D.*

COROLLAIRE I.

152. Puiſque les droites PF, SH menées des centres de gravité P, S des deux eſpaces paraboliques correſpondans ARO, AEO, vers l'axe ou diamètre AR parallèlement à la corde Oo, ſont telles que AF ou $PI = \frac{2}{5}\,AR$, $PF = \frac{3}{8}\,RO$, & AH ou $SL = \frac{3}{10}\,AR$, $SH = \frac{3}{4}\,RO$; il eſt évident que Fig. 94 & 95.

1.° Si l'on prend ſur l'axe ou diamètre AR, à commencer du ſommet A, une partie $AF = \frac{2}{5}\,AR$, & que l'on mène par le point F parallèlement à la corde Oo une droite $FP = \frac{3}{8}\,RO$, le point P où ſe terminera cette perpendiculaire ſera le centre de gravité de l'eſpace parabolique ARO compris entre l'arc AO & les deux coordonnées AR, RO.

2.° Si l'on prend ſur l'axe ou diamètre AR, à commencer du ſommet A, une partie $AH = \frac{3}{10}\,AR$, & que l'on mène par le point H parallèlement à la corde Oo une droite $HS = \frac{3}{4}\,RO$, le point S ſera le centre de gravité de l'eſpace parabolique extérieur AEO.

COROLLAIRE II.

Fig. 94 & 95. 153. Donc si l'on prend sur l'axe ou diamètre AR, à commencer du sommet A, une partie $AF = \frac{3}{5} AR$, & une partie $AH = \frac{3}{10} AR$, le point F sera le centre de gravité du segment parabolique OAo compris entre la parabole & sa corde Oo, & le point H sera le centre de gravité du système des deux espaces extérieurs égaux AEO, Aeo. Car les deux espaces paraboliques ARO, ARo, placés des deux côtés de l'axe AR, étant composés d'élémens correspondans égaux chacun à chacun, & les deux espaces paraboliques AEO, Aeo étant aussi composés d'élémens correspondans égaux chacun à chacun; il est évident que si les droites PF, SH menées des centres de gravité des deux espaces paraboliques ARO, AEO parallèlement à la corde Oo, sont prolongées en p, s au delà de l'axe ou du diamètre AR, de manière que $Fp = FP$ & $Hs = HS$, les points p, s seront les centres de gravité des deux espaces ARo, Aeo. Ainsi le centre de gravité du système des deux espaces égaux ARO, ARo, ou du segment parabolique OAo, sera au milieu de la droite Pp, c'est-à-dire, au point F; & le centre de gravité du système des deux espaces AEO, Aeo sera au milieu de la droite Ss, c'est-à-dire, au point H. Or les points F, H sont placés dans l'axe AR de manière que $AF = \frac{3}{5} AR$, & $AH = \frac{3}{10} AR$.

THEOREME.

Fig. 96. 154. *Le centre de gravité* P *d'un sphéroïde parabolique produit par la révolution d'un demi-segment parabolique* ARO *compris entre un arc* AO *de parabole,*

ſon axe AR *& ſon ordonnée* RO, *eſt ſitué dans l'axe* AR *de manière que* $AP = \frac{2}{3}AR$.

DÉMONSTRATION.

Le ſphéroïde parabolique eſt compoſé de lames circulaires qui ont pour rayons les ordonnées *GK, HL, IM, &c.* de la parabole, & dont les centres de figure & de gravité ſont dans l'axe *AR*. Ainſi le centre de gravité du ſyſtème de tous ces élémens circulaires, c'eſt-à-dire, celui du ſphéroïde parabolique, eſt un point *P* du même axe *AR;* & il reſte ſeulement à démontrer que $AP = \frac{2}{3}AR$.

Toutes les lames circulaires qui ont pour rayons les ordonnées *GK, HL, IM, &c.* ſont proportionnelles aux quarrés $\overline{GK}^2, \overline{HL}^2, \overline{IM}^2$, *&c.* de ces ordonnées.

Mais en ſuppoſant que *AB* eſt le paramètre de la parabole, on trouve *(n.° 146)*

$\overline{GK}^2 : \overline{HL}^2 : \overline{IM}^2 : \&c :: AG : AH : AI : \&c.$

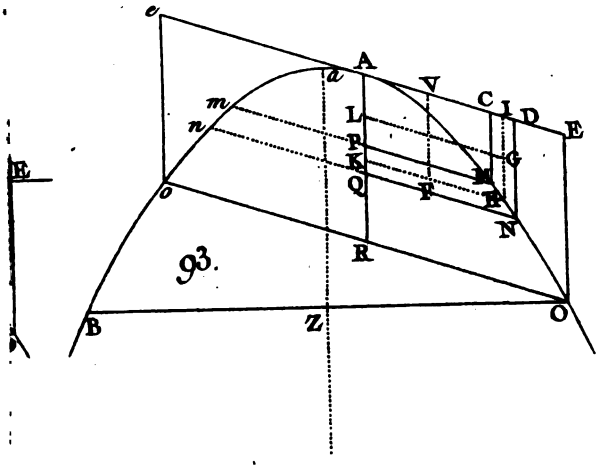
Ainſi toutes les lames circulaires qui ont pour rayons les ordonnées *GK, HL, IM, &c.* de la parabole, & qui compoſent le ſphéroïde parabolique, ſont proportionnelles à leurs abſciſſes *AG, AH, AI, &c.* c'eſt-à-dire, aux parties de la droite *AR* compriſes entre ces lames & le ſommet *A;* & comme les centres de gravité particuliers de toutes ces lames ſont dans la droite *AR*, il ſuit du n.° 37 que le centre de gravité de leur ſyſtème, c'eſt-à-dire, celui du ſphéroïde parabolique, eſt un point *P* pris dans la droite *AR* de manière que $AP = \frac{2}{3}AR$. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

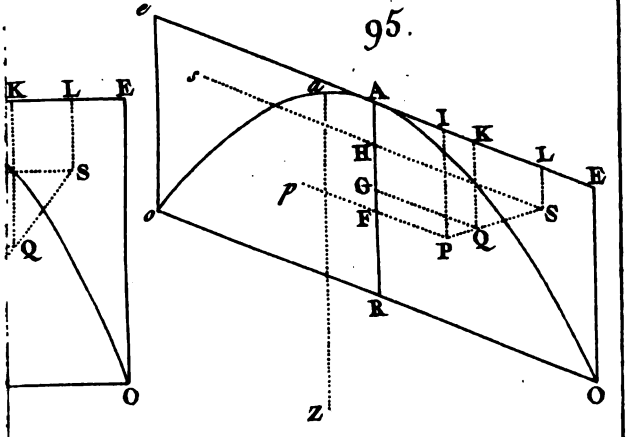
155. Si ce Volume avoit été précédé d'un Traité des ſections coniques, on auroit démontré que ſi Fig. 97.

l'on coupe un ſphéroïde parabolique par un plan OQo oblique à l'axe aZ de ce ſphéroïde ou de la demi-parabole génératrice AZO, la ſection ſera une ellipſe, & que toutes les ſections OQo, DEd, *&c.* obliques à l'axe aZ & parallèles entr'elles, ſeront des ellipſes ſemblables dont tous les axes homologues Oo, Dd, *&c.* ſeront dans un même plan OAB paſſant par l'axe aZ de la parabole, & dont tous les centres R, C, *&c.* ſeront dans un même diamètre AR de la parabole, c'eſt-à-dire, dans une même droite AR parallèle à l'axe aZ de la parabole. On auroit encore démontré que les quarrés des ordonnées parallèles RO, CD, *&c.* qui ſont les demi-diamètres de ces ellipſes ſemblables, ſont proportionnels à leurs abſciſſes AR, AC, *&c.* & comme les ſurfaces des ellipſes ſemblables ſont proportionnelles aux quarrés de leurs axes homologues Oo, Dd, *&c.* ou de leurs demi-axes correſpondans RO, CD, *&c.* les ſurfaces des mêmes ellipſes parallèles ſont auſſi proportionnelles aux abſciſſes AR, AC, *&c.*

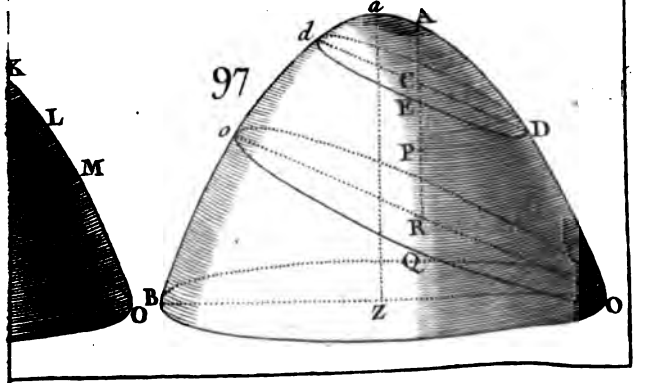
On pourra donc ſuppoſer qu'un tronc de ſphéroïde parabolique coupé par un plan OQo oblique à ſon axe aZ, eſt compoſé d'une infinité de lames elliptiques ſemblables, telles que OQo, DEd, *&c.* qui ont leurs centres de figure ou leurs centres de gravité dans une même droite AR, & qui ſont proportionnelles aux parties de cette ligne droite compriſes entre ces lames & le commencement des élémens. Ainſi *(n.° 37)* ſi l'on prend une partie $AP = \frac{2}{3}AR$ ſur la droite AR menée par le centre R de la baſe elliptique du tronc de ſphéroïde parabolique $AOQoA$ parallèlement à l'axe aZ, le point P ſera le centre de gravité de ce tronc.


e
A
a
V
C
I
D
E
m
n
L
P
K
Q
G
M
F
H
N
R
o
B
Z
O

93.


e
s
a
A
I
K
L
E
H
G
F
S
P
Q
p
o
R
Z
O
K
L
E
S
Q
O

95.


a
A
d
K
C
L
E
M
o
D
P
R
Q
B
O
Z

97

CHAPITRE IX.

Des mouvemens des centres de gravité.

THEOREME.

156. *LORSQUE les centres de gravité particuliers de deux corps* A, C *ſe meuvent uniformément ſuivant deux lignes droites, ſi le centre de gravité de leur ſyſtème ſe meut, il décrit uniformément une ligne droite.* Fig. 98, 99.

DÉMONSTRATION.

Suppoſons que les droites AB, CD, qui peuvent être ou ne pas être dans un même plan, ſoient celles que les centres de gravité particuliers des deux corps A, C doivent parcourir uniformément dans le même temps, en partant des deux points A, C.

Si l'on tire les droites AC, BD, & qu'on les diviſe proportionnellement, l'une en P, l'autre en R, de manière que l'on ait $C : A :: \left\{\begin{matrix} AP : PC \\ BR : RD \end{matrix}\right\}$, le point P ſera *(n.° 56)* le centre de gravité du ſyſtème des deux corps A, C au moment qu'ils commenceront à décrire les deux droites AB, CD, & le point R ſera le centre de gravité du ſyſtème des mêmes corps, au moment que leurs centres de gravité particuliers achèveront de parcourir les deux droites AB, CD. Ainſi il faut démontrer que ſi l'on tire la droite PR, le centre de gravité du ſyſtème des deux corps A, C ſera continuellement dans cette ligne, & la décrira uniformément.

Suppoſons d'abord que le centre de gravité du corps A ait parcouru ſur AB une partie AE, telle

que l'on ait $AE : EB :: AP : PC$, ou $:: C : A$, & ſoient tirées les deux droites BC, EP; ces deux lignes ſeront parallèles *(Géom. n.° 250)*, & les deux triangles AEP, ABC ſeront ſemblables.

Puiſque *(hyp.)* les centres de gravité particuliers des deux corps A, C doivent décrire uniformément dans le même temps les deux droites AB, CD, ils parcourront dans le même temps des parties proportionnelles de ces lignes. Ainſi pendant que le centre de gravité du mobile A parcourra ſur AB une partie AE, celui du mobile C parcourra ſur CD une partie CH telle que l'on aura $CD : CH :: AB : AE$, ou $:: AC : AP$ ou $:: BD : BR$; & par conſéquent ſi l'on tire la droite RH, elle ſera auſſi parallèle à BC, & les deux triangles BDC, RDH ſeront ſemblables.

Les deux droites EP, RH étant parallèles à BC, ſeront parallèles entr'elles, & par conſéquent dans un même plan. Ainſi quand même les deux droites AB, CD décrites par les centres de gravité des deux mobiles A, C, ne ſeroient pas dans un même plan; ſi l'on tire la droite PR, cette ligne & la droite EH qui joindront les extrémités des deux parallèles EP, RH, ſeront dans un même plan; ainſi elles ſe couperont en quelque point Q, & les deux triangles EPQ, HRQ ſeront ſemblables.

Les triangles ſemblables AEP, ABC donneront $EP : BC :: AE : AB$.

Les triangles ſemblables BDC, RDH donneront $BC : RH :: CD : HD$ ou $:: AB : EB$.

Ainſi multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $EP : RH :: AE : EB$, ou *(conſtr.)* $:: AP : PC :: C : A$.

Mais les triangles ſemblables EPQ, HRQ donneront $EQ : QH :: EP : RH$.

On aura donc auſſi $EQ : QH :: C : A$; & par conſéquent *(n.° 56)* le point Q, où la droite PR coupe la droite EH qui joint les centres de gravité des deux mobiles A, C au moment qu'ils arrivent aux points correſpondans E, H, eſt le centre de gravité du ſyſtème de ces deux corps.

Les mêmes triangles ſemblables EPQ, HRQ donneront encore $PQ : QR :: EP : RH$; & comme on vient de trouver $EP : RH :: AE : EB$, on aura $PQ : QR :: AE : EB$, & *componendo* $PR : PQ :: AB : AE$.

Si l'on conſidère maintenant les deux parties AE, CH, que les centres de gravité particuliers des corps A, C ont parcourues en même temps, comme les lignes entières que ces mobiles devoient parcourir, & qu'ayant pris ſur ces deux droites AE, CH des parties AG, CK telles que l'on ait $\left\{\begin{matrix} AG : GE \\ CK : KH \end{matrix}\right\} :: AP : PC$ ou $:: C : A$, l'on tire la droite GK; on démontrera de la même manière que cette ligne & la droite PQ ou PR ſeront dans un même plan, & que le point T où ces deux lignes ſe rencontreront, ſera le centre de gravité du ſyſtème des deux corps A, C arrivés en même temps en G & K; enfin l'on fera voir que $PT : PQ :: AG : AE$.

Et ſi l'on regarde les deux parties EB, HD qui reſtent à parcourir, comme les lignes droites entières que les mobiles A, C doivent décrire, & qu'ayant pris ſur ces lignes des parties EF, HI telles que l'on ait $\left\{\begin{matrix} EF : FB \\ HI : ID \end{matrix}\right\} :: EQ : QH$, ou $:: C : A$, l'on tire la droite FI; on prouvera auſſi de la même manière

que les deux lignes *FI, QR* ou *PR* ſont dans un même plan; que le point *S* où elles ſe coupent eſt le centre de gravité du ſyſtème des deux mobiles arrivés en même temps en *F, I;* & que *QS* : *SR* :: *EF* : *FB.*

Enfin comme chacune des nouvelles parties parcourues, ou qui reſteront à parcourir en même temps, pourront toûjours être priſes pour des lignes entières que les mobiles ont décrites ou doivent décrire, & qu'après avoir fait parcourir aux deux mobiles des parties de ces lignes qui ſoient aux parties reſtantes dans le même rapport de *C* à *A,* l'on joigne les centres de gravité de ces mobiles par des lignes droites; on trouvera que chacune de ces lignes droites ſera dans un même plan avec la droite *PR,* & que *PR* la coupera en un point qui ſera le centre de gravité des deux mobiles. On conclurra de là que le centre de gravité du ſyſtème de deux corps *A, C* mûs uniformément le long de deux lignes droites *AB, CD* eſt continuellement dans une même droite *PR:* & comme on prouvera toûjours en même temps que les parties *PQ, PT, QS, &c.* parcourues par le centre de gravité du ſyſtème ſur la droite *PR,* ſont proportionnelles aux parties correſpondantes *AE, AG, EF, &c.* que le centre de gravité du mobile *A* parcourt uniformément ſur la droite *AB;* il eſt évident que le centre de gravité du ſyſtème des deux mobiles *A, C* parcourra uniformément la droite *PR,* pendant que les centres de gravité particuliers de ces deux mobiles décriront uniformément les deux droites *AB, CD* ſituées ou non ſituées dans un même plan. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 100 & 101. 157. Donc ſi les centres de gravité particuliers de

de tant de corps qu'on voudra *A*, *B*, *C*, *D*, *&c.* décrivent uniformément des lignes droites *AE*, *BH*, *CL*, *DO*, *&c.* ſituées ou non ſituées dans un même plan, parallèles ou non parallèles entr'elles, le centre de gravité du ſyſtème de tous ces corps parcourra auſſi uniformément une ligne droite *MN*.

Car les centres de gravité particuliers des deux premiers corps *A* & *B* parcourant uniformément les droites *AE*, *BH*, on vient de voir que le centre de gravité de leur ſyſtème, que nous ſuppoſerons placé en *F*, parcourra uniformément une ligne droite *FG*.

Or toutes les parties d'un ſyſtème pouvant être conſidérées comme réunies à leur centre de gravité commun, on pourra regarder les deux mobiles *A* & *B* comme un ſeul corps *(A + B)* dont le centre de gravité *F* décrit une ligne droite *FG*. Ainſi pendant que le centre de gravité *F* de ce corps *A + B*, & celui du corps ſuivant *C*, parcourront uniformément les lignes droites *FG*, *CL*, le centre de gravité *I* de leur ſyſtème décrira auſſi uniformément une ligne droite *IK*.

Les deux corps *(A + B)* & *C*, c'eſt-à-dire, les trois corps *A*, *B*, *C* pouvant être regardés comme les parties d'un ſeul corps *(A + B + C)* réunies à ſon centre de gravité *I*; pendant que le centre de gravité *I* de ce corps parcourra la droite *IK*, & que celui *D* du corps ſuivant parcourra la droite *DO*, le centre de gravité *M* du ſyſtème de ces deux corps, c'eſt-à-dire, celui des quatre corps *A*, *B*, *C*, *D*, parcourra uniformément une ligne droite *MN*; & ainſi des autres.

COROLLAIRE II.

Fig. 98 & 99. 158. Si les droites *AB, CD* parcourues par les centres de gravité des deux corps *A, C,* ſont dans un même plan, la droite *PR* décrite par le centre de gravité du ſyſtème de ces deux corps, ſera auſſi dans le même plan. Car les deux droites *AB, CD* étant dans un même plan, les deux autres *AC, BD* qu'on mènera par leurs extrémités, ſeront auſſi dans un même plan avec elles; & toute droite menée par deux points des deux lignes *AC, BD* ſera encore dans le même plan.

Or le centre de gravité du ſyſtème des deux corps *A, C* au moment qu'ils commencent à décrire les deux droites *AB, CD,* eſt un point de la droite *AC;* & le centre de gravité du ſyſtème des mêmes corps au moment qu'ils achèvent de parcourir les deux mêmes droites, eſt un point de la droite *BD :* & l'on a prouvé *(n.° 156)* que le centre de gravité du ſyſtème de ces deux corps ſuit uniformément la droite *PR.* Donc la droite parcourue par le centre de gravité du ſyſtème des deux mobiles *A* & *C,* eſt dans un même plan avec les deux droites *AB, CD* décrites par les centres particuliers de ces deux mobiles.

COROLLAIRE III.

Fig. 102 & 103. 159. Si les deux droites *AB, CD,* décrites uniformément par les centres de gravité particuliers des deux mobiles *A* & *C,* ſont parallèles & par conſéquent dans un même plan, la droite *PR* décrite par le centre de gravité du ſyſtème ſera ſituée avec elles dans un même plan, comme on vient de le démontrer, & leur ſera parallèle.

Car le point P étant le centre de gravité du ſyſtème des deux corps A & C lorſque ces corps partent des deux points A, C, & R étant le centre de gravité du ſyſtème des mêmes corps lorſqu'ils arrivent en B, D, on aura $A + C : C :: AC : AP :: BD : BR$; & *alternando* $AP : BR :: AC : BD$. Mais les droites AC, BD étant prolongées, s'il eſt néceſſaire, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en un point G, & la droite AB étant ſuppoſée parallèle à CD, on aura *(Géom. n.° 246)* $AC : BD :: AG : BG$. Ainſi l'on aura $AP : BR :: AG : BG$; & par conſéquent *(Géom. n.° 250)* la droite PR décrite par le centre de gravité du ſyſtème des deux mobiles A, C, ſera parallèle à la droite AB décrite par le mobile A.

COROLLAIRE IV.

160. Donc ſi les centres de gravité particuliers $A, B, C, D, \&c.$ de tant de corps qu'on voudra, décrivent des lignes droites $AE, BH, CL, DO, \&c.$ parallèles entr'elles, ſituées ou non ſituées dans un même plan, la droite MN, que décrira le centre de gravité du ſyſtème de tous ces corps, ſera parallèle aux droites parcourues par leurs centres de gravité particuliers. Fig. 101.

Car ſuppoſant que F ſoit le centre de gravité commun aux deux premiers mobiles A, B, ce centre de gravité décrira une droite FG parallèle à AE.

Les deux corps A, B étant conſidérés comme un ſeul corps $(A + B)$ réuni au centre de gravité F de leur ſyſtème, & I étant ſuppoſé le centre de gravité d'un nouveau ſyſtème compoſé des deux corps $(A + B)$ & C; ce centre de gravité I décrira une

droite *IK* parallèle à *CL*, & par conſéquent parallèle à *AE*.

Par la même raiſon, ſi l'on conſidère les trois corps *A, B, C* comme un ſeul corps *(A + B + C)* réuni à leur centre de gravité commun *I*, & que *M* ſoit le centre de gravité d'un nouveau ſyſtème compoſé des deux corps *(A + B + C)* & *D*; ce centre de gravité *M* décrira encore une droite *MN* parallèle à *DO*, & par conſéquent auſſi parallèle à *AE*; & ainſi des autres.

COROLLAIRE V.

Fig. 104 & 105. **161.** Si les centres de gravité particuliers *A, E* de deux mobiles décrivent uniformément & en même temps les côtés homologues & parallèles chacun à chacun de deux polygones ſemblables *ABCD, EFGH*, & qu'on tire des lignes droites indéfinies *AE, BF, CG, DH, &c.* par les angles ou points correſpondans de ces polygones; on déduira aiſément du Corollaire III, que le centre de gravité *N* du ſyſtème de ces deux mobiles décrira auſſi uniformément le contour d'un troiſième polygone *NOPQ* dont les côtés ſeront parallèles à ceux des deux premiers polygones, & terminés par les droites *AE, BF, CG, DH, &c.*

Mais les polygones ſemblables *ABCD, EFGH* ayant les côtés homologues proportionnels & parallèles chacun à chacun, toutes les droites *AE, BF, CG, DH* menées par leurs angles correſpondans, concourront en un même point *X*. Car les deux côtés *AB, BC* du premier polygone qui partent d'un même point *B* de la droite *BX*, étant parallèles & proportionnels aux deux côtés correſpondans *EF, FG* du ſecond polygone

qui partent auſſi d'un même point F de la droite BX, les deux droites AE, CG prolongées, s'il eſt néceſſaire, concourront en un même point X avec la droite BF ou ſon prolongement *(Géom. n.° 264)*. Par la même raiſon les droites BF, DH concourront auſſi au même point X avec la droite CG; & ainſi des autres. Ainſi les polygones $ABCDX$, $NOPQX$, $EFGHX$ ſeront compoſés de triangles ſemblables, & ſeront par conſéquent ſemblables *(Géom. n.° 269)*.

Si un troiſième mobile I décrivoit uniformément un troiſième polygone $IKLM$ ſemblable à l'un $ABCD$ des polygones précédens, & dont les côtés IK, KL, LM fuſſent proportionnels & parallèles aux côtés homologues AB, BC, CD; ce nouveau polygone ſeroit auſſi ſemblable au polygone $NOPQ$ décrit par le centre de gravité N du ſyſtème des deux premiers mobiles A, E, & ſes côtés ſeroient auſſi proportionnels & parallèles aux côtés du même polygone $NOPQ$. Ainſi conſidérant les deux premiers mobiles A, E comme un ſeul corps réuni au centre de gravité N de leur ſyſtème, on prouvera, comme on a fait pour deux ſimples corps, que le centre de gravité R du ſyſtème compoſé des deux corps $(A + E)$, I, ou des trois corps A, E, I, décrira un polygone $RSTV$ qui ſera ſemblable au polygone $IKLM$, & qui aura les côtés parallèles à ceux de ce polygone.

Donc ſi les centres de gravité A, E, I de trois mobiles décrivent uniformément & en même temps les côtés homologues & parallèles chacun à chacun de trois polygones ſemblables $ABCD$, $EFGH$, $IKLM$, le centre de gravité R du ſyſtème de ces trois corps décrira auſſi uniformément & dans le même temps

les côtés homologues d'un quatrième polygone *RSTV* qui ſera ſemblable aux trois premiers, & qui aura ſes côtés proportionnels & parallèles à leurs côtés homologues.

On démontrera de la même manière que ſi les centres de gravité particuliers de quatre ou cinq, ou de tant de corps qu'on voudra, décrivent uniformément & en même temps les côtés homologues d'autant de figures ſemblables dont les côtés correſpondans ſoient parallèles chacun à chacun, le centre de gravité du ſyſtème de tous ces corps décrira auſſi uniformément & dans le même temps le contour d'un autre polygone dont les côtés ſeront parallèles aux côtés homologues des premiers.

COROLLAIRE VI.

162. Les courbes ſemblables pouvant être regardées comme des polygones ſemblables d'une infinité de côtés, il ſuit du Corollaire précédent que ſi les centres de gravité particuliers de tant de corps qu'on voudra, décrivent uniformément & dans le même temps des courbes ſemblables dont les parties homologues ſoient parallèles chacune à chacune, & que tous les mobiles partent des points homologues de ces courbes; le centre de gravité du ſyſtème de tous ces corps décrira auſſi uniformément & dans le même temps une courbe qui ſera ſemblable à celles que décriront les centres de gravité particuliers, & dont toutes les parties ſeront parallèles aux parties homologues de ces courbes.

On doit remarquer que ce Corollaire & le précédent ſeront toûjours vrais, lors même que chacune des courbes ou chacun des polygones que les centres de gravité

particuliers des mobiles décriront, ne ſera pas dans un même plan; & qu'il ſuffit que toutes les parties correſpondantes de ces courbes ou de ces polygones ſoient proportionnelles & parallèles chacune à chacune.

REMARQUE.

163. Lorſque deux corps A, C ſe meuvent uniformément en ſens contraires ſuivant deux droites parallèles AB, CD, & ſont réciproquement proportionnels à ces parallèles que leurs centres de gravité particuliers décrivent en même temps, le centre de gravité du ſyſtème de ces deux corps demeure en repos. Fig. 106.

Car les deux droites AB, CD, que décrivent les centres de gravité particuliers des deux corps A, C, étant parallèles; ſi l'on tire une droite AC par les centres de gravité de ces deux corps au moment qu'ils commencent à parcourir les deux droites AB, CD, & que l'on tire auſſi une droite BD par les centres de gravité des mêmes corps au moment qu'ils achèvent de parcourir les mêmes lignes, les deux droites AC, BD ſe couperont en quelque point P, & les deux triangles APB, CPD ſeront ſemblables; ainſi l'on aura $\left\{\begin{matrix} PA : PC \\ PB : PD \end{matrix}\right\} :: AB : CD$.

Mais *(hyp.)* les deux droites AB, CD étant réciproquement proportionnelles aux deux mobiles A, C, on aura $AB : CD :: C : A$.

On aura donc auſſi $\left\{\begin{matrix} PA : PC \\ PB : PD \end{matrix}\right\} :: C : A$; & par conſéquent *(n.° 56)* le même point P ſera le centre de gravité du ſyſtème des deux corps A, C au moment que leurs centres de gravité particuliers commenceront

à décrire les deux droites AB, CD, & au moment qu'ils achèveront de parcourir les mêmes lignes.

Si l'on tire encore par le même point P tant de droites $EH, FK, \&c.$ qu'on voudra; on a vû *(Géom. n.° 262)* que toutes les parties $AE, EF, FB, \&c.$ de la droite AB ſeront proportionnelles aux parties $CH, HK, KD, \&c.$ de la droite CD. Ainſi puiſque *(hyp.)* les centres de gravité particuliers des deux corps A, C doivent parcourir uniformément dans le même temps les deux droites AB, CD, & doivent par conſéquent parcourir en même temps des parties proportionnelles de ces lignes; le corps A parcourra les parties $AE, EF, FB, \&c.$ de la droite AB, pendant que le corps C décrira les parties correſpondantes $CH, HK, KD, \&c.$ de la droite CD; & par conſéquent les deux corps A, C ſe trouveront dans les mêmes inſtans aux points correſpondans E, H & $F, K, \&c.$

Mais à cauſe des parallèles AB, CD, les triangles $APE, APF, \&c.$ ſeront ſemblables aux triangles $CPH, CPK, \&c.$ & donneront $\left\{\begin{matrix} PE : PH \\ PF : PK \end{matrix}\right\} :: PA : PC$; & l'on vient de voir que $PA : PC :: C : A$.

On aura donc $\left\{\begin{matrix} PE : PH \\ PF : PK \end{matrix}\right\} :: C : A$; & par conſéquent *(n.° 56)* le point P ſera encore le centre de gravité du ſyſtème des deux corps A, C arrivés en même temps aux points correſpondans quelconques E, H & F, K des lignes qu'ils doivent parcourir.

Ainſi dans quelque poſition que ſe trouvent les deux corps A, C, dont les centres de gravité particuliers décrivent uniformément & en ſens contraires deux droites parallèles AB, CD réciproquement

proportionnelles aux poids de ces corps, le centre de gravité du ſyſtème de ces mêmes corps ſera conſtamment au point *P*, & demeurera par conſéquent immobile.

Le ſyſtème de deux corps *M*, *N*, dont les centres de gravité particuliers décrivent uniformément des lignes droites *MO*, *NQ*, pouvant être regardé comme un ſeul corps dont le centre de gravité *A* décrit uniformément une ligne droite *AB*; il eſt évident que ſi le centre de gravité *A* du ſyſtème de deux corps *M*, *N*, & celui d'un troiſième corps *C*, décrivent uniformément en ſens contraires & en même temps deux lignes droites parallèles *AB*, *CD* réciproquement proportionnelles aux poids de ces corps, le centre de gravité du ſyſtème de ces trois corps ſera conſtamment en un même point *P*, & demeurera par conſéquent immobile. Fig. 107.

Il en ſera de même ſi le centre de gravité du ſyſtème d'un plus grand nombre de corps, & celui d'un nouveau corps ou du ſyſtème de pluſieurs corps, décrivent uniformément en ſens contraires & en même temps deux droites parallèles réciproquement proportionnelles aux poids de ces ſyſtèmes : le centre de gravité du ſyſtème général reſtera conſtamment en un même point *P*, & demeurera par conſéquent immobile.

164. Il ſuit de cette Remarque & du dernier Théorème joint à ſes Corollaires, que ſi les centres de gravité particuliers d'un nombre quelconque de corps ſe meuvent uniformément ſuivant des lignes droites ſituées ou non ſituées dans un même plan, le centre de gravité du ſyſtème de tous ces corps décrira auſſi uniformément une ligne droite, ou demeurera en repos.

THEOREME.

165. *Lorſque les centres de gravité particuliers d'un nombre quelconque de corps ſe meuvent uniformément ſuivant des lignes droites parallèles entr'elles, & que le centre de gravité de leur ſyſtème général ſe meut par conſéquent auſſi uniformément ſuivant une ligne parallèle à celle que décrit le centre de gravité particulier de chaque corps;*

1.° Si tous les mobiles vont d'un même côté, le produit fait de la ſomme de tous ces mobiles, multipliée par la droite que décrit le centre de gravité de leur ſyſtème général, eſt égal à la ſomme des produits particuliers faits de chaque corps & de la ligne droite que décrit ſon centre de gravité particulier.

2.° Si tous les mobiles ne vont pas d'un même côté, le produit fait de la ſomme de tous ces corps, multipliée par la droite que décrit le centre de gravité de leur ſyſtème général, eſt égal à la différence qu'il y a entre la ſomme des produits particuliers faits de chacun des corps qui vont d'un même côté, multiplié par la ligne que décrit le centre de gravité de ce corps, & la ſomme des produits faits de chacun des corps qui vont du côté oppoſé, multiplié par le chemin que parcourt le centre de gravité de ce corps.

DÉMONSTRATION.

Fig. 101. PARTIE I. Suppoſons que *AE, BH, CL, DO, &c.* ſoient les droites parallèles décrites uniformément par les centres de gravité particuliers des corps *A, B, C, D, &c.* qu'on ſuppoſe aller d'un même côté, & que la droite *MN* parallèle aux premières ſoit le chemin parcouru uniformément par le centre de

gravité du ſyſtème général de tous les mobiles A, B, C, D, &c. il faut démontrer qu'on aura

$$(A+B+C+D\&c.)\times MN = A\times AE + B\times BH + C\times CL + D\times DO + \&c.$$

Lorſque les deux premiers corps A, B auront parcouru les deux premières parallèles AE, BH, & que leur centre de gravité commun F ſitué dans la droite AB qui joint les centres de gravité de ces deux corps, aura parcouru une troiſième parallèle FG terminée par une droite EH menée par les centres de gravité des mêmes corps au moment qu'ils arriveront en E, H; les produits $A\times AE$, $B\times BH$ & $(A+B)\times FG$ ſeront (*n.° 61*) les momens des deux corps A, B & de leur ſyſtème $A+B$ ſitués en E, H, G, relativement à AB conſidéré comme l'axe perpendiculaire ou oblique de ces momens. Ainſi (*n.° 64*) l'on aura $(A+B)\times FG = A\times AE + B\times BH$.

Regardons maintenant les deux corps A, B comme un premier corps $(A+B)$ dont le centre de gravité F parcourt uniformément la droite FG, pendant qu'un ſecond corps C décrit uniformément la parallèle CL. Lorſque les deux corps $(A+B)$, C auront parcouru les deux parallèles FG, CL, & que leur centre de gravité commun I ſitué dans la droite FC aura parcouru une troiſième parallèle IK terminée par la droite GL qui joindra les centres de gravité des deux corps $(A+B)$ & C au moment qu'ils arriveront en G, L; les produits $(A+B)\times FG$, $C\times CL$, & $(A+B+C)\times IK$ ſeront les momens des deux corps $(A+B)$, C, & de leur ſyſtème, relativement à la droite FC conſidérée comme l'axe perpendiculaire ou oblique de ces momens. Ainſi l'on aura (*n.° 64*) $(A+B+C)\times IK = (A+B)\times FG + C\times CL$.

Mais on vient de trouver $(A+B)\times FG=A\times AE+B\times BH$.

On aura donc auſſi $(A+B+C)\times IK=A\times AE+B\times BH+C\times CL$.

Les trois premiers corps A, B, C pouvant être regardés comme un premier corps $(A+B+C)$ dont le centre de gravité I décrit uniformément la droite IK, pendant qu'un ſecond corps D parcourt uniformément la parallèle DO; lorſque les deux corps $(A+B+C)$ & D auront parcouru les deux parallèles IK, DO, & que leur centre de gravité commun M premièrement ſitué dans la droite ID aura parcouru une troiſième parallèle MN, les produits $(A+B+C)\times IK$, $D\times DO$, $(A+B+C+D)\times MN$ ſeront les momens des deux corps $(A+B+C)$, D, & celui de leur ſyſtème $(A+B+C+D)$ relativement à la droite ID; ainſi *(n.° 64)* l'on aura $(A+B+C+D)\times MN=(A+B+C)\times IK+D\times DO$.

Mais on vient de trouver que $(A+B+C)\times IK=A\times AE+B\times BH+C\times CL$.

Donc on aura auſſi $(A+B+C+D)\times MN=A\times AE+B\times BH+C\times CL+D\times DO$.

C. Q. F. I.° D.

Fig. 103. PARTIE II. Suppoſons que le corps A, dont le centre de gravité parcourt uniformément la droite AB, repréſente le ſyſtème de tous les corps qui décrivent des parallèles à AB dans le même ſens que le corps A ſe meut ſuivant AB: le produit $A\times AB$ repréſentera le produit fait de la ſomme de tous les mobiles qui vont d'un même ſens, multipliée par le chemin du centre de gravité du ſyſtème de tous ces mobiles; ainſi *(Part. I.)* ce produit $A\times AB$ ſera égal à la ſomme des produits particuliers faits de chacun de ces mobiles multiplié par le chemin que décrit ſon centre de gravité.

Imaginons que le corps C, dont le centre de gravité ſe meut du côté oppoſé ſuivant la droite CD parallèle à AB, eſt le ſyſtème de tous les corps qui ſe meuvent dans le même ſens que le corps C ſuivant des parallèles à CD ou à AB : il eſt clair que $C \times CD$ ſera le produit de la ſomme de tous les mobiles qui ſe meuvent ſuivant des directions contraires, multipliée par le chemin du centre de gravité de tous ces nouveaux mobiles; ainſi *(Part. I.)* ce produit ſera égal à la ſomme des produits particuliers faits de chacun de ces mobiles multiplié par la ligne que décrira ſon centre de gravité.

Enfin ſuppoſons que P eſt le centre de gravité du ſyſtème général $(A + C)$ de tous les mobiles qui ſe mouvront les uns dans un ſens, les autres dans un autre, & que PR eſt le chemin parcouru par ce centre de gravité : il eſt évident que la démonſtration de la ſeconde partie du Théorème ſe réduit à prouver que $(A + C) \times PR = A \times AB - C \times CD$.

Soit tirée la droite AC par les centres de gravité des deux ſyſtèmes particuliers A, C, au moment qu'ils commencent à décrire en ſens contraires les deux parallèles AB, CD, & ſoit menée la droite BD par les centres de gravité des mêmes ſyſtèmes particuliers, au moment qu'ils achèveront de parcourir les mêmes parallèles AB, CD. On a ci-devant démontré que la droite PR, décrite par le centre de gravité P du ſyſtème général, ſera parallèle aux deux droites AB, CD, & terminée par les deux droites AC, BD.

Soit menée par le point P parallèlement à BD la droite EPF qui coupera AB en E & le prolongement de CD en F. Les trois parallèles BE, DF, PR compriſes entre les parallèles BD, EF ſeront

égales; ainſi l'on aura $AE = AB - PR$, & $CF = CD + PR$; de plus les triangles APE, CPF ſeront ſemblables & donneront $AE : CF :: PA : PC$, c'eſt-à-dire, $AB - PR : CD + PR :: PA : PC$.

Mais P étant le centre de gravité des deux ſyſtèmes A & C, on aura $PA : PC :: C : A$.

On aura donc auſſi $AB - PR : CD + PR :: C : A$; & par conſéquent $A \times AB - A \times PR = C \times CD + C \times PR$.

Ajoûtant à chaque membre $A \times PR - C \times CD$, on aura $A \times AB - C \times CD = A \times PR + C \times PR = (A + C) \times PR$. *C. Q. F. 2.° D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 104 & 105. 166. Lorſque les centres de gravité particuliers de pluſieurs corps A, I, E, *&c.* décrivent uniformément dans le même temps les côtés homologues de pluſieurs polygones ſemblables $ABCD$, $IKLM$, $EFGH$, *&c.* & que les côtés homologues de ces polygones ſont parallèles chacun à chacun, en ſorte que *(n.° 161)* le centre de gravité R du ſyſtème des mobiles décrive auſſi uniformément dans le même temps les côtés d'un autre polygone ſemblable $RSTV$ parallèles aux côtés homologues des premiers:

Fig. 104. 1.° Si tous les mobiles A, I, E, *&c.* vont d'un même côté; le produit fait de la ſomme de tous ces mobiles, multipliée par le contour du polygone que décrit le centre de gravité de leur ſyſtème général, eſt égal à la ſomme des produits faits de chaque mobile multiplié par le contour du polygone que décrit le centre de gravité particulier de ce mobile; c'eſt-à-dire que $(A + I + E \&c) \times RSTV = A \times ABCD + I \times IKLM + E \times EFGH \&c.$

Fig. 105. 2.° Si tous les mobiles ne vont pas d'un même

côté; le produit fait de la ſomme de tous ces mobiles, multipliée par le contour du polygone que décrit le centre de gravité de leur ſyſtème général, eſt égal à la différence qu'il y a entre la ſomme des produits faits de chacun des mobiles qui vont d'un même côté, multiplié par le contour du polygone que décrit ſon centre de gravité, & la ſomme des produits faits de chacun des autres corps qui vont du côté oppoſé, multiplié par le contour du polygone que décrit le centre de gravité particulier de ce corps. Par exemple, ſi deux corps *A, I* décrivent les côtés homologues & parallèles chacun à chacun de deux polygones ſemblables *ABCD, IKLM* en allant du même ſens, & qu'un troiſième corps *E* décrive en ſens contraire les côtés homologues d'un troiſième polygone ſemblable *EFGH*, parallèles aux côtés homologues des deux premiers, en ſorte que le centre de gravité *R* du ſyſtème de ces trois corps décrive auſſi dans le même temps les côtés homologues d'un quatrième polygone *RSTV* qui ſeront parallèles aux côtés homologues des trois premiers polygones; on aura

$$(A + E + I) \times RSTV = A \times ABCD + I \times IKLM - E \times EFGH.$$

Car puiſque les premiers côtés *AB, IK, EF, RS* décrits en même temps par les mobiles *A, I, E*, & par leur centre de gravité commun *R*, ſont parallèles, on aura

(fig. 104) $(A + I + E) \times RS = \left\{\begin{matrix} A \times AB \\ + I \times IK \\ + E \times EF \end{matrix}\right\}$,

& (fig. 105) $(A + I + E) \times RS = \left\{\begin{matrix} A \times AB \\ + I \times IK \\ - E \times EF \end{matrix}\right\}$.

Et puiſque les ſeconds côtés *BC, KL, FG, ST*

décrits en même temps par les mêmes mobiles *A*, *I*, *E*, & par leur centre de gravité commun *R*, ſont parallèles, on aura auſſi

(fig. 104) $(A+I+E)\times ST=\left\{\begin{matrix}A\times BC\\+I\times KL\\+E\times FG\end{matrix}\right\}$,

& (fig. 105) $(A+I+E)\times ST=\left\{\begin{matrix}A\times BC\\+I\times KL\\-E\times FG\end{matrix}\right\}$.

On aura par la même raiſon,

(fig. 104) $(A+I+E)\times TV=\left\{\begin{matrix}A\times CD\\+I\times LM\\+E\times GH\end{matrix}\right\}$,

& (fig. 105) $(A+I+E)\times TV=\left\{\begin{matrix}A\times CD\\+I\times LM\\-E\times GH\end{matrix}\right\}$.

Et ainſi des autres.

Donc ajoûtant enſemble toutes ces égalités, on aura

(fig. 104) $(A+I+E)\times(RS+ST+TV)=\left\{\begin{matrix}A\times(AB+BC+CD)\\+I\times(IK+KL+LM)\\+E\times(EF+FG+GH)\end{matrix}\right\}$,

c'eſt-à-dire $(A+I+E)\times RSTV=A\times ABCD+I\times IKLM+E\times EFGH$.

Et (fig. 105) $(A+I+E)\times RS+ST+TV=\left\{\begin{matrix}A\times(AB+BC+CD)\\+I\times(IK+KL+LM)\\-E\times(EF+FG+GH)\end{matrix}\right\}$,

c'eſt-à-dire $(A+I+E)\times RSTV=A\times ABCD+I\times IKLM-E\times EFGH$.

COROLLAIRE II.

167. Les cercles & toutes les courbes ſemblables pouvant être regardés comme des polygones ſemblables d'une infinité de côtés; il eſt évident que lorſque pluſieurs corps décriront en même temps & uniformément des parties homologues & parallèles chacune à chacune de cercles ou de polygones ſemblables, &

& que *(n.° 162)* le centre de gravité du ſyſtème de tous ces corps décrira par conſéquent uniformément dans le même temps des parties homologues & parallèles d'un autre cercle ou d'une autre figure ſemblable :

1.° Si tous les mobiles vont d'un même ſens, le produit fait de la ſomme de ces mobiles multipliée par la circonférence du cercle ou de la courbe décrite par le centre de gravité du ſyſtème de ces mobiles, eſt égal à la ſomme des produits faits de chaque mobile multiplié par la circonférence du cercle ou de la courbe que décrit ſon centre de gravité.

2.° Si tous les mobiles ne vont pas d'un même côté, le produit fait de la ſomme de tous ces mobiles multipliée par la circonférence du cercle ou de la courbe décrite par le centre de gravité de leur ſyſtème, eſt égal à la différence qu'il y a entre la ſomme des produits faits de chacun des corps qui vont d'un même côté, multiplié par la circonférence du cercle ou de la courbe décrite par le centre de gravité de ce corps, & la ſomme des produits faits de chacun des autres corps qui vont du côté oppoſé, multiplié par la circonférence du cercle ou de la courbe que décrit le centre de gravité de ce corps.

COROLLAIRE III.

168. Les lignes, les ſuperficies & leurs parties pouvant être conſidérées comme des poids proportionnels aux étendues de ces lignes ou de ces ſuperficies & de leurs parties ; il eſt évident que ſi les centres de gravité particuliers de toutes les parties d'une ligne ou d'une ſuperficie décrivent en même temps ou des lignes droites parallèles, ou les côtés homologues parallèles chacun à chacun d'autant de

polygones ſemblables, ou des parties homologues parallèles chacune à chacune d'autant de circonférences de cercles, ou de courbes ſemblables chacune à chacune, le produit fait de la ligne ou de la ſuperficie mobile entière multipliée par le chemin que décrira ſon centre de gravité, ſera égal à la ſomme des produits faits de chacune de ſes parties multipliée par le chemin de ſon centre de gravité particulier, lorſque toutes les parties de cette ligne ou de cette ſuperficie iront d'un même côté; & lorſque toutes les parties de la ligne ou de la ſuperficie mobile n'iront pas d'un même côté, le même produit ſera égal à la différence qu'il y aura entre la ſomme des produits faits de chacune des parties qui iront d'un même côté, multipliée par le chemin de ſon centre de gravité particulier, & la ſomme des produits faits de chacune des parties qui auront un mouvement oppoſé, multipliée par le chemin de ſon centre de gravité.

Les mouvemens des centres de gravité peuvent être d'un grand uſage dans la Géométrie pratique: on va voir dans l'article ſuivant l'application qu'on en peut faire pour trouver les longueurs des portées moyennes dans les déblais & les remblais.

Des portées moyennes des terres dans les déblais & les remblais.

169. On peut déduire du dernier Théorème & de ſes deux premiers Corollaires, une règle pour évaluer les portées moyennes des terres dans les déblais & les remblais, lorſque toutes les portées ſe font ſuivant des lignes droites parallèles entr'elles, ou ſuivant des portions ſemblables de polygones ou de courbes ſemblables dont les parties correſpondantes

ſont parallèles chacune à chacune. Quoique cette règle puiſſe avoir rarement lieu dans la pratique, & que la difficulté de ſon application ſoit le plus ſouvent une raiſon pour n'en point faire uſage, lors même qu'elle peut avoir lieu; on croit devoir la donner, ne fût-ce que pour faire voir comment on peut appliquer à la Géométrie pratique la doctrine des centres de gravité.

Suppoſons qu'on ait un terrein à aplanir, en abaiſſant une éminence *ABC* dont les terres doivent remplir un endroit *AMN* enfoncé au deſſous d'un niveau *CAN* auquel l'aplaniſſement de toute la ſurface eſt aſſujéti; & que les déblais à faire dans les parties élevées au deſſus de ce niveau, ſoient égaux aux remblais à faire dans les parties où la ſurface du terrein eſt au deſſous du même niveau. Voici la règle dont on pourra faire uſage dans les cas énoncés, pour trouver la longueur de la portée moyenne des terres depuis le déblai juſque dans le remblai, en ſuppoſant que tous les tranſports ſe feront ſuivant une même ligne *CAN*, droite ou courbe, tracée ou imaginée ſur la ſurface aplanie, ou ſuivant des lignes ſemblables & parallèles à cette ligne *CAN*. Fig. 108.

Après avoir trouvé le centre de gravité P *de l'éminence* ABC *qu'il faut abaiſſer, & le centre de gravité* Q *du creux qu'il faut remplir, on imaginera des lignes verticales* PR, QS *tirées de ces centres de gravité juſqu'à l'une* CAN *des lignes ſuivant leſquelles on doit faire le tranſport des terres: & la partie* RS *de cette ligne, compriſe entre les deux verticales* PR, QS, *ſera la longueur de la portée moyenne; en ſorte que toutes les différentes longueurs des portées ſe réduiront à la longueur de la ligne* RS, *comme ſi toute la terre à tranſporter ſe trouvoit*

réunie au ſeul point R, *& qu'il fallût la porter au ſeul & même point* S.

Car le travail pour le tranſport de chaque partie de terre étant d'autant plus grand que la maſſe de cette partie eſt plus conſidérable, & que le chemin parcouru dans ſon tranſport eſt plus long; il eſt clair que le tranſport de chaque partie de terre portée de l'éminence *ABC* dans le creux *AMN*, doit être regardé comme le produit de la maſſe de cette partie, multipliée par la diſtance qu'il y a de l'endroit de l'éminence où elle eſt priſe juſqu'à l'endroit du creux où elle eſt dépoſée; en ſorte que le tranſport de la totalité de l'éminence *ABC* doit être conſidéré comme la ſomme des produits faits de chacune des parties de l'éminence, multipliée par le chemin du centre de gravité de cette partie.

Or tous les chemins parcourus dans les tranſports particuliers de toutes les parties de l'éminence, étant ſuppoſés parallèles à la ligne *CAN*, la ſomme des produits de chaque partie de l'éminence, multipliée par le chemin que décrit le centre de gravité de cette partie, eſt égale au produit fait de l'éminence entière, ou de la ſomme de ſes parties multipliée par le chemin du centre de gravité de l'éminence; & le chemin du centre de gravité de l'éminence eſt égal à la ligne *RS*, puiſqu'on ſuppoſe que le centre de gravité général *P* de toutes les terres de l'éminence répond au point *R* du chemin parcouru, & que le centre de gravité *Q* des mêmes terres tranſportées dans le creux *AMN* répond au point *S* du même chemin parcouru.

Donc la ſomme de tous les tranſports particuliers de toutes les parties de l'éminence *ABC* dans le creux *AMN*, doit être conſidérée comme ſi toute la terre

à tranſporter étoit raſſemblée au point R qui répond verticalement au centre de gravité P de l'éminence, & qu'il fallût la porter au ſeul & même point S qui répond verticalement au centre de gravité Q du creux ou du remblai.

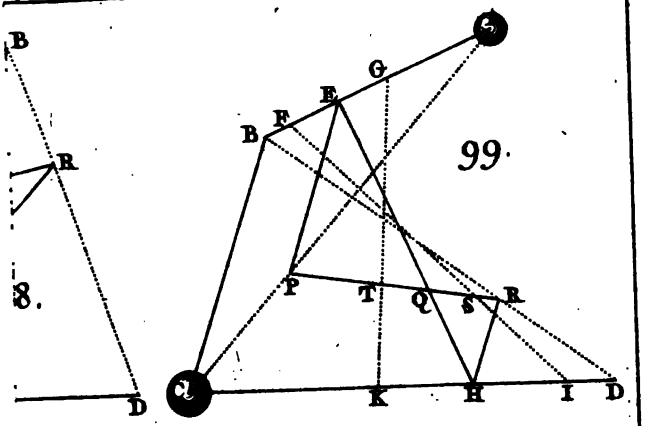
On remarquera qu'on ne regarde point la diſtance PQ du centre de gravité P du déblai au centre de gravité Q du remblai, comme le chemin parcouru par le centre de gravité des terres tranſportées; parce que le tranſport des terres ne ſe fait pas ſuivant cette ligne PQ, ni ſuivant des lignes qui lui ſoient parallèles: & qu'on prend pour le chemin parcouru par le centre de gravité de l'éminence, une ligne RS ſituée ſur le terrein aplani, & terminée par des verticales tirées par les centres de gravité P, Q du déblai & du remblai; parce qu'on ſuppoſe que les terraſſiers marchent ſuivant cette ligne ou ſuivant des lignes qui lui ſont parallèles.

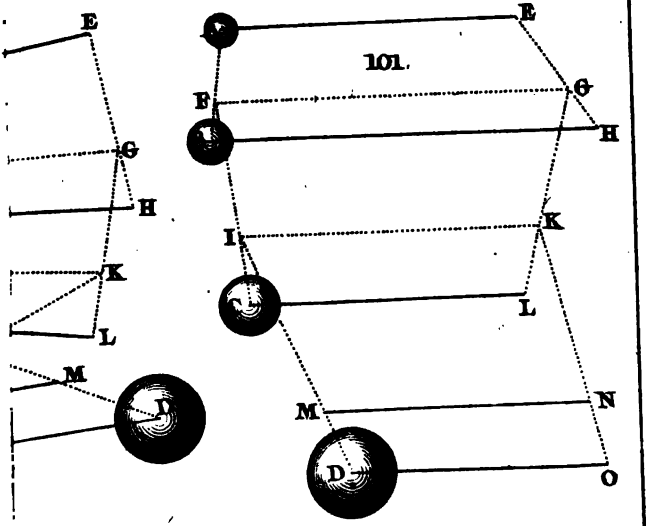
Il ſuit de la première partie du Corollaire premier ou du Corollaire II, que dans le cas où tous les chemins parcourus pour le tranſport de l'éminence ſont des portions de polygones ſemblables, ou de courbes ſemblables dont toutes les parties correſpondantes peuvent être regardées comme parallèles chacune à chacune; ſi l'on décrit entre les deux points R, S une portion de polygone ou de courbe ſemblable à quelqu'un des chemins parcourus, cette portion de polygone ou de courbe ſera le chemin parcouru par le centre de gravité des terres tranſportées, & ſera par conſéquent la longueur de la portée moyenne des terres.

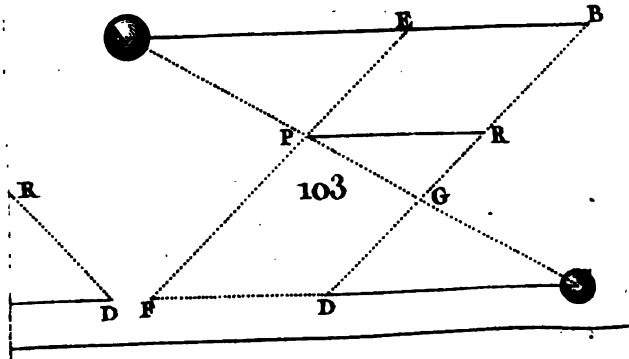
Si les terres d'une même éminence dont on ſuppoſe que P eſt le centre de gravité, étoient portées dans Fig. 109.

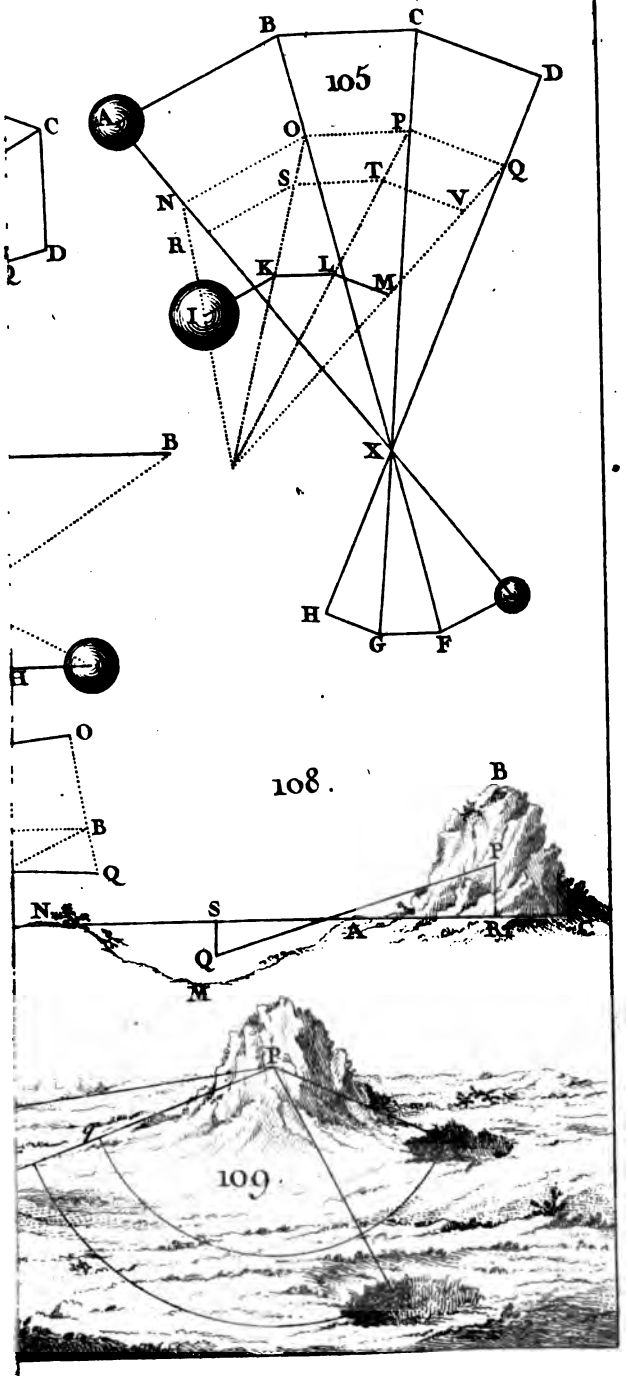
différens endroits creux d'un terrein pour l'aplanir, & que Q, R, S, T fuſſent les centres de gravité particuliers de ces creux; on porteroit ſur une même ligne PT tirée du point qui répond verticalement au centre de gravité P de l'éminence, au point qui répond au centre de gravité T de l'un des creux qu'il faut remplir, toutes les diſtances PQ, PR, PS qu'il y auroit du même point de l'éminence aux points qui répondroient verticalement aux centres de gravité Q, R, S, c'eſt-à-dire qu'on feroit $Pq = PQ$, $Pr = PR$, $Ps = PS$; & ayant trouvé le centre de gravité commun V des points r, s, q, T, où l'on ſuppoſeroit que les creux Q, R, S, T ſont ſitués, on prendroit la ligne PV pour la longueur de la portée moyenne des terres.

On tire encore de la théorie des centres de gravité, principalement du dernier Théorème & de ſes deux premiers Corollaires, une méthode très-commode pour meſurer les ſurfaces & les ſolidités qui peuvent être engendrées par des mouvemens de lignes & de ſurfaces : cette méthode fera le ſujet du Chapitre ſuivant.


B
R
8.
D
99.
G
E
B
F
P
T
Q
S
R
K
H
I
D


E
G
H
K
L
M
E
101.
E
G
H
I
K
L
M
N
D
O


E
B
P
R
R
103
G
D
F
D


105
A
B
C
D
O
P
Q
S
T
V
N
R
K
L
M
I
X
H
G
F
108.
109.

CHAPITRE X.

Des ſuperficies & des ſolides qui doivent leur génération à des mouvemens de lignes & de plans; & de l'uſage qu'on peut faire du mouvement du centre de gravité d'une figure, pour trouver l'étendue de la ſuperficie ou du ſolide qu'elle engendre.

170. LORSQU'UNE droite *AB* n'a point d'autre mouvement que ſuivant la direction de ſa longueur, chacun de ſes points ſuit le chemin du point qui le précède; en ſorte que du mouvement de cette ligne tranſportée de *AB* en *CD* ſuivant ſa propre direction, il ne réſulte qu'une nouvelle portion de ligne *BD* qui ne compoſe avec la droite mobile *AB* qu'une ſeule droite *AD*. Ainſi le mouvement d'une ligne droite ſuivant la direction de ſa longueur, ne ſauroit produire de ſuperficie. Fig. 110.

Il n'eſt pas moins évident qu'un plan *ABC* qui ſe meut ſuivant ce plan lui-même, ne peut pas produire un ſolide, mais ſeulement un plan plus grand *ABEFD* dont le plan mobile *ABC* fait partie. Fig. 111.

Les lignes droites & les plans ne peuvent donc engendrer des ſuperficies & des ſolides par leurs mouvemens, qu'autant qu'ils s'éloignent de la direction de leur première ſituation. Mais comme une ligne droite ou un plan, avec la même quantité de mouvement, s'écarte plus ou moins de ſa première direction, & décrit une étendue ſuperficielle ou ſolide plus ou moins grande ſuivant que ſon mouvement eſt

moins ou plus oblique à ſa première direction ; il convient de diſtinguer dans le mouvement d'une ligne droite ou d'un plan, la partie du mouvement qui engendre une ſuperficie ou un ſolide, d'avec celle qui ne contribue point à ſa génération.

Fig. 112 & 113. Lorſqu'une droite AB, en demeurant toûjours parallèle à ſa première poſition, ſe meut dans un plan le long d'une directrice oblique AC droite ou courbe, on peut ſuppoſer qu'elle a en même temps deux mouvemens perpendiculaires l'un à l'autre, l'un ſuivant ſa propre direction & par lequel elle n'engendre point de ſuperficie, l'autre ſuivant une droite AE perpendiculaire à ſa longueur & par lequel (ſi elle n'avoit point d'autre mouvement) elle produiroit un parallélogramme rectangle $ABFE$ égal au parallélogramme rectiligne ou mixtiligne $ABDC$ réellement engendré.

Ainſi quoique le parallélogramme rectiligne ou mixtiligne $ABDC$ ſoit véritablement engendré par le mouvement ſimple de la droite AB le long de la directrice AC droite ou courbe, & que la figure de ce quadrilatère dépende de la figure & de la poſition de ſa directrice AC relativement à ſa génératrice AB; ſa grandeur ne peut pas être attribuée au mouvement ſimple de ſa génératrice le long de ſa directrice, mais ſeulement au ſecond des deux mouvemens perpendiculaires l'un à l'autre, dans leſquels on a décompoſé ce mouvement ſimple, c'eſt-à-dire, à celui par lequel la génératrice AB ſe meut le long d'une droite AE qui lui eſt perpendiculaire.

L'étendue d'une ſuperficie engendrée par le mouvement d'une ligne droite ne peut donc être attribuée à tout le mouvement de cette ligne, que dans le cas

où cette ligne eſt perpendiculaire à la direction de ſon mouvement.

Il eſt aiſé de prouver de la même manière que la grandeur du ſolide d'un priſme engendré par un plan mû ſuivant une directrice oblique à ce plan, ne doit pas être attribuée à tout le mouvement de ce plan; mais qu'il faut décompoſer ce mouvement en deux autres dirigés, l'un ſuivant ce plan lui-même, l'autre ſuivant une direction perpendiculaire au même plan: & comme le mouvement d'un plan ſuivant lui-même ne produit point de ſolide, on ne doit regarder comme véritable cauſe productrice de l'étendue du priſme engendré, que le ſecond mouvement par lequel le plan générateur ſe meut le long d'une ligne perpendiculaire à lui-même.

Il ſuit de là que ſi tous les points d'une ligne droite ou d'un plan décrivent des polygones ou des courbes dont toutes les parties correſpondantes ſoient égales & parallèles chacune à chacune, on ne doit regarder le mouvement de cette ligne ou de ce plan comme la vraie cauſe productrice de l'étendue engendrée, que dans le cas où cette ligne & ce plan ſeront continuellement perpendiculaires aux chemins que parcourront tous leurs points.

Par la même raiſon, lorſque le contour d'un polygone ou d'une courbe engendrera par ſon mouvement une ſuperficie, on n'attribuera l'étendue de cette ſuperficie au mouvement du contour du polygone ou de la courbe mobile, que dans le cas où toutes les parties de ce contour ou de cette courbe ſeront continuellement perpendiculaires aux chemins que décriront tous leurs points.

On va voir dans le reſte de ce Chapitre, l'uſage

qu'on peut faire du mouvement du centre de gravité d'une figure, pour trouver l'étendue de la ſuperficie ou du ſolide qu'elle engendre par ſon mouvement : & comme on vient de prouver que les étendues ſuperficielles ou ſolides engendrées ne doivent être attribuées à des mouvemens de lignes ou de plans, qu'autant que toutes les parties de ces lignes ou de ces plans ſont continuellement perpendiculaires aux chemins que parcourent tous leurs points ; on ne parlera que des étendues qui ſeront produites par des lignes ou par des plans mobiles continuellement perpendiculaires aux chemins parcourus par tous leurs points, & qu'on pourra par conſéquent conſidérer comme la ſomme des filets produits par tous ces points, ou comme la ſomme des produits faits de chaque point ou de chaque partie infiniment petite, & du chemin parcouru par le centre de ce point ou de cette partie infiniment petite.

THEOREME.

Fig. 114 & 115. **171.** *L'étendue ſuperficielle ou ſolide engendrée par une ligne ou par un plan mobile continuellement perpendiculaire aux chemins ſemblables & parallèles parcourus vers un même côté par tous ſes points, eſt égale au produit de la multiplication de cette ligne ou de ce plan par le chemin* PQ *que décrit ſon centre de gravité* P.

DÉMONSTRATION.

Puiſqu'on ſuppoſe la ligne ou le plan mobile continuellement perpendiculaire aux chemins parcourus par tous ſes points, chacune des parties infiniment petites de cette ligne ou de ce plan engendrera une petite ſuperficie ou un petit ſolide qui ſera le produit

de cette partie multipliée par le chemin de quelqu'un de ſes points : & comme les chemins parcourus par tous les points d'une partie infiniment petite diffèrent infiniment peu les uns des autres, & doivent par conſéquent être réputés égaux au chemin décrit par le centre de gravité de cette partie, la petite ſuperficie ou le petit ſolide que chaque partie infiniment petite de la ligne ou du plan mobile engendrera, ſera le produit de cette partie multipliée par le chemin de ſon centre de gravité.

L'étendue ſuperficielle ou ſolide entière engendrée par une ligne ou par un plan mobile, ſera donc la ſomme des produits faits de chaque partie de cette ligne ou de ce plan, multipliée par le chemin du centre de gravité particulier de cette partie.

Mais *(n.° 168)* puiſque tous les points de la ligne ou du plan mobile vont d'un même côté & décrivent des lignes ſemblables & parallèles, la ſomme des produits faits de chaque partie de cette ligne ou de ce plan mobile, multipliée par le chemin de ſon centre de gravité particulier, eſt égale au produit de la multiplication de cette ligne ou de ce plan par le chemin de ſon centre de gravité.

Donc l'étendue ſuperficielle ou ſolide engendrée par une ligne ou par un plan mobile continuellement perpendiculaire aux chemins ſemblables & parallèles parcourus vers un même côté par tous ſes points, eſt égale au produit de la multiplication de cette ligne ou de ce plan par le chemin de ſon centre de gravité. *C. Q. F. D.*

Quoiqu'on puiſſe déduire ce Théorème des Ouvrages de Pappus, tout le monde convient qu'on le doit au Père

Guldin, Jéſuite, qui l'a développé dans ſon Livre De centro gravitatis, *publié en 1635, où il donne cette règle :* Quantitas *rotanda* in viam rotationis *centri gravitatis* ducta producit quantitatem *rotundam* uno gradu altiorem poteſtate ſive quantitate rotatâ ; *& où il avertit que cette règle a lieu, non ſeulement dans le cas où la ligne décrite par le centre de gravité de la figure génératrice eſt circulaire, mais encore dans celui où cette ligne eſt droite, & que la grandeur génératrice ſe meut en demeurant toûjours parallèle à ſa première poſition, & de manière que tous ſes points décrivent des lignes perpendiculaires à cette première poſition.*

La régle du P. Guldin ayant été reçûe avec applaudiſſement de tous les Géomètres, pluſieurs en ont donné la démonſtration. M. Leibnitz dans les Actes de Leipſick (année 1695, pag. 493 & ſuiv.) *l'a étendue à la dimenſion des ſurfaces engendrées par le développement des lignes courbes, & M. Varignon eſt le premier qui ait démontré l'uſage que M. Leibnitz en a fait.*

Cette règle du P. Guldin contenue dans le Théorème qu'on vient de démontrer, étant extrêmement commode en Géométrie pour le toiſé d'une infinité de ſurfaces & de ſolides, on en va faire l'application au toiſé de pluſieurs figures : on commencera par celles qui ſont les plus faciles à toiſer, & dont on ſait déjà trouver les ſurfaces & les ſolidités.

COROLLAIRE I.

172. Quoiqu'on ait prouvé de la manière la plus ſimple dans la Géométrie, que l'aire d'un parallélogramme rectangle eſt égale au produit de ſes deux côtés contigus ; que la ſurface d'un priſme droit, ſans y comprendre ſa baſe génératrice *ABCDE* & ſa

Fig. 114.

baſe oppoſée *FGHIK*, eſt égale au produit de la multiplication du contour de cette baſe par ſa directrice *AF*; & que la ſolidité d'un priſme droit eſt égale au produit de l'aire de ſa baſe *ABCDE* multipliée par ſa directrice *AF*; on ne croit pas devoir négliger de faire voir que les mêmes vérités ſont des conſéquences ſimples & naturelles du Théorème qu'on vient de démontrer.

Chacune de ces figures eſt *(n.° 171)* égale au produit de la multiplication de ſa baſe génératrice par le chemin que décrit ſon centre de gravité. Or le chemin décrit par le centre de gravité de la baſe génératrice de chacune de ces figures, eſt égal à la directrice du mouvement de cette baſe, puiſqu'elle ſe meut parallèlement à ſa première poſition le long de la directrice. Donc chacune de ces figures eſt le produit de ſa baſe génératrice multipliée par ſa directrice.

COROLLAIRE II.

173. Quoique la propriété qu'un triangle a d'être la moitié d'un parallélogramme rectangle de même baſe & de même hauteur, paroiſſe le moyen le plus ſimple pour prouver qu'un triangle eſt égal au produit de ſa baſe & de la moitié de ſa hauteur, on peut déduire cette vérité avec la même facilité du Théorème qu'on vient de démontrer.

Car on peut imaginer qu'un triangle rectangle *ABC* eſt produit par le mouvement de toutes les parties infiniment petites *AD, DE, EF, &c.* de ſa baſe *AB*, mûes ſuivant des lignes parallèles à ſa hauteur *BC*; & que toutes ces parties, après avoir produit le triangle *ABC*, ſont également diſtribuées ſur Fig. 116.

l'hypoténuſe *AC* en *GH, IK, LM, &c.* en ſorte que leur centre de gravité commun ſe trouve au milieu *Q* de cette hypoténuſe. Cela poſé, le milieu ou centre de gravité *P* de la droite génératrice *AB*, ſe meut en ligne droite *(n.° 160)* depuis le milieu *P* de cette ligne juſqu'au milieu *Q* de l'hypoténuſe *AC*, & décrit par conſéquent une ligne égale à la moitié de la hauteur *BC*. Or *(n.° 171)* la ſurface totale engendrée par toutes les parties de la droite *AB*, eſt égale au produit de cette génératrice & de la ligne *PQ* décrite par ſon centre de gravité. Ainſi l'aire du triangle rectangle *ABC* eſt égale au produit de ſa baſe *AB* & de la moitié de ſa hauteur *BC*.

Fig. 117. Un triangle *ABD* non rectangle étant égal à un triangle rectangle *ABC* de même baſe & de même hauteur, il eſt clair que l'aire du triangle non rectangle *ABD* ſera auſſi égale au produit de ſa baſe *AB* & de la moitié de ſa hauteur *BC*.

Fig. 118. On déduira de même & avec la même facilité de la règle qu'on vient de démontrer, que le ſolide d'une pyramide *SABC* eſt égal au produit de ſa baſe *ABC* & du tiers de ſa hauteur *SD;* quoiqu'il paroiſſe plus commode de tirer cette conſéquence de la propriété qu'ont les pyramides d'être égales aux tiers des priſmes de même baſe & de même hauteur.

Car dans le cas où la perpendiculaire *SD* tirée du ſommet de la pyramide ſur ſa baſe eſt au dedans de la pyramide : ſi l'on diviſe ſa baſe *ABC* en triangles *ADB, BDC, ADC* par des lignes tirées du point *D* à tous ſes angles, & qu'on imagine le ſolide de la pyramide compoſé d'une infinité de filets engendrés par tous les points de la baſe *ABC* mûs parallèlement à la perpendiculaire *SD* juſqu'aux faces

ASB, BSC, ASC; il eſt évident qu'après la génération de tous ces filets, tous les points générateurs qui étoient contenus dans les parties *ADB, BDC, ADC* de la baſe, ſe trouveront uniformément répandus ſur les faces triangulaires correſpondantes *ASB, BSC, ASC* de la pyramide; en ſorte que les centres de gravité de tous ces points ainſi diſtribués, ſeront les mêmes que ceux *M, N, O* des faces triangulaires de la pyramide, & ſeront par conſéquent élevés au deſſus de la baſe *ABC* d'une quantité égale au tiers de ſa hauteur *SD.* Le centre de gravité *P* du ſyſtème général de tous les points de la baſe *ABC,* arrivés aux termes de leurs mouvemens, ſe trouvera donc dans un plan *MNO* parallèle à la baſe *ABC,* & élevé au deſſus de cette baſe d'une quantité égale au tiers de la hauteur *SD;* ainſi ce centre de gravité général aura décrit parallèlement à *SD* une droite égale au tiers de cette ligne.

Mais le ſolide engendré par tous les points de la baſe *ABC* mûs parallèlement à la perpendiculaire *SD,* eſt égal au produit de cette baſe multipliée par le chemin du centre de gravité du ſyſtème de tous ſes points. Donc le ſolide de la pyramide *SABC* eſt égal au produit de la multiplication de ſa baſe *ABC* par le tiers de ſa hauteur *SD.*

Si la perpendiculaire tirée du ſommet de la pyramide ſur le plan de ſa baſe n'étoit point compriſe dans cette pyramide, la pyramide ſeroit encore égale au produit de ſa baſe & du tiers de ſa hauteur; parce qu'elle ſeroit égale à une autre pyramide de même baſe & de même hauteur qui contiendroit la perpendiculaire menée de ſon ſommet à ſa baſe.

COROLLAIRE III.

Fig. 119 & 120. **174.** Lorſqu'une droite AC tourne autour de ſon extrémité C, le milieu ou centre de gravité P de cette ligne décrit une ligne égale à la moitié de celle qui eſt parcourue par ſon autre extrémité A; & ſi l'on ne conſidère que le mouvement d'une partie Fig. 121 & 122. AB de cette ligne, le milieu ou centre de gravité P de cette partie AB décrira une ligne égale à la moitié de la ſomme des deux lignes décrites par ſes deux extrémités A, B.

Fig. 119, 120, 121 & 122. Or *(n.° 171)* l'aire de la ſuperficie engendrée par le mouvement de la droite AC, ou par celui de ſa partie AB, eſt égale au produit de cette ligne ou de cette partie multipliée par le chemin de ſon centre de gravité P.

Donc l'aire engendrée par la ligne entière AC mûe autour de ſon extrémité C, eſt égale au produit de cette ligne multipliée par la moitié du chemin que parcourt ſon extrémité A; & l'aire de la ſuperficie engendrée par une partie AB de cette ligne, eſt égale au produit de cette partie AB multipliée par la moitié de la ſomme des deux lignes que parcourent les deux extrémités A, B de cette partie.

Fig. 119 & 121. Si la droite AC ſe meut dans un plan, elle décrira un cercle ou un ſegment de cercle ACD, & ſa partie AB produira une couronne ou une portion de couronne compriſe entre deux circonférences ou entre deux portions de circonférences parallèles. Donc l'aire d'un cercle entier ou d'un ſecteur de cercle, eſt égale au produit de ſon rayon multiplié par la moitié de ſa circonférence, ou par la moitié de ſon arc AD; & l'aire d'une couronne ou d'une portion de couronne

compriſe

compriſe entre deux parties de rayons, & deux circonférences ou deux portions de circonférences parallèles, eſt égale au produit de la portion AB du rayon multipliée par la moitié de la ſomme des deux circonférences, ou des deux portions de circonférences, décrites par les extrémités de la partie génératrice AB.

Si la droite AC eſt l'hypoténuſe d'un triangle rectangle ADC mobile autour de ſon côté CD, elle produira la ſurface convexe d'un cone droit, & ſa partie AB engendrera la ſurface convexe d'un tronc conique droit à baſes oppoſées parallèles. Ainſi la ſurface convexe d'un cone droit eſt égale au produit de la multiplication de la droite CA tirée de ſon ſommet à la circonférence de ſa baſe, par la moitié de la circonférence de la même baſe; & la ſurface convexe d'un tronc conique droit à baſes oppoſées parallèles, eſt égale à ſon côté générateur AB multiplié par la moitié de la ſomme des circonférences des deux baſes oppoſées de ce tronc. Fig. 120 & 122.

COROLLAIRE IV.

175. Si du centre de gravité P d'un triangle rectangle ADC l'on mène une perpendiculaire PQ ſur ſon côté CD, cette perpendiculaire ſera égale au tiers du côté AD; ainſi lorſque pour engendrer le ſolide d'un cone droit, l'on fera tourner ce triangle autour de ſon côté CD, ſon centre de gravité P décrira une circonférence égale au tiers de celle de la baſe du cone. Donc (*n.° 171*) le ſolide du cone droit qui ſera engendré par la révolution du triangle ADC, ſera égal au produit de la multiplication du Fig. 123.

triangle générateur ADC, par le tiers de la circonférence de ſa baſe.

Mais le triangle $ADC = \frac{AD \times DC}{2}$. Donc ſi l'on repréſente la circonférence du cercle qui a AD pour rayon par *circ* AD, & le tiers de cette circonférence par $\frac{circ\ AD}{3}$, le ſolide du cone droit dont il eſt queſtion ſera exprimé par $\frac{AD \times DC}{2} \times \frac{circ\ AD}{3}$, ou par $circ\ AD \times \frac{AD}{2} \times \frac{DC}{3}$.

Or $circ\ AD \times \frac{AD}{2}$ eſt la ſurface d'un cercle qui a AD pour rayon, c'eſt-à-dire, la ſurface de la baſe du cone engendré par la révolution du triangle rectangle ADC.

Donc le ſolide d'un cone droit engendré par le triangle ADC, eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par le tiers de ſa hauteur DC.

COROLLAIRE V.

Fig. 124. **176.** Le tronc d'un cone droit à baſes oppoſées parallèles eſt engendré par une portion $ADEB$ de triangle rectangle, mûe autour du côté CD de ce triangle. Ainſi le ſolide de ce tronc eſt égal au produit du trapèze générateur $ADEB$ multiplié par la circonférence que décrit le centre de gravité P de ce trapèze.

Mais au lieu de multiplier le trapèze générateur entier $ADEB$ par la circonférence que décrit ſon centre de gravité P, on peut partager ce trapèze par une diagonale BD en deux triangles EBD, ABD,

& conſidérer que le premier triangle EBD qui eſt rectangle, produit par ſa révolution ſur ED un cone droit qui a même hauteur que le tronc, & qui a pour baſe la baſe ſupérieure du tronc : & comme le ſolide de ce cone droit eſt déterminé *(n.° 175)*, on n'aura plus qu'à trouver le ſolide engendré par la révolution du triangle ABD autour de l'axe DE, en multipliant l'aire de ce triangle par la circonférence que décrit ſon centre de gravité ; ce qui donnera (en ſuppoſant que R eſt le centre de gravité du triangle ABD, que RT eſt perpendiculaire à l'axe DE, & que *circ* RT repréſente la circonférence du cercle qui a RT pour rayon) $\frac{1}{2} AD \times DE \times$ *circ* RT pour le ſolide qui reſte à déterminer.

Le centre de gravité R du triangle ABD étant au milieu d'une droite QS menée parallèlement à ſa baſe par un point pris au tiers de la hauteur de ce triangle, il eſt aiſé de voir que $RS = \frac{1}{3} AD$, & que $ST = \frac{1}{3} BE$; d'où il ſuit que $RT = \frac{AD}{3} + \frac{BE}{3}$, & par conſéquent *circ* $RT = \frac{\text{circ } AD}{3} + \frac{\text{circ } BE}{3}$. Ainſi le ſolide engendré par le triangle ABD ſera exprimé par $\frac{1}{2} AD \times DE \times \left(\frac{\text{circ } AD}{3} + \frac{\text{circ } BE}{3}\right)$, ou par *circ* $AD \times \frac{1}{2} AD \times \frac{1}{3} DE +$ *circ* $BE \times \frac{1}{2} AD \times \frac{1}{3} DE$.

Mais 1.° *circ* $AD \times \frac{1}{2} AD \times \frac{1}{3} DE$ eſt le ſolide d'un cone qui a AD pour rayon & DE pour hauteur, c'eſt-à-dire, d'un cone qui a même hauteur que le tronc, & dont la baſe eſt égale à la baſe inférieure du même tronc. 2.° *circ* $BE \times \frac{1}{2} AD \times \frac{1}{3} DE$ eſt auſſi le ſolide d'un cone qui a même hauteur DE que le tronc, & dont la baſe eſt égale à *circ* $BE \times \frac{1}{2} AD$.

Or cette baſe eſt moyenne proportionnelle entre les deux baſes circulaires oppoſées du tronc, qui ſont exprimées par *circ* $BE \times \frac{1}{2} BE$, & *circ* $AD \times \frac{1}{2} AD$; car *circ* $BE \times \frac{1}{2} BE$: *circ* $BE \times \frac{1}{2} AD :: BE : AD$, & $BE : AD ::$ *circ* BE : *circ* AD ou : : *circ* $BE \times \frac{1}{2} AD$: *circ* $AD \times \frac{1}{2} AD$.

Ainſi *circ* $BE \times \frac{1}{2} BE$: *circ* $BE \times \frac{1}{2} AD ::$ *circ* $BE \times \frac{1}{2} AD$: *circ* $AD \times \frac{1}{2} AD$; c'eſt-à-dire que *circ* $BE \times \frac{1}{2} AD$ eſt une moyenne proportionnelle entre les produits *circ* $BE \times \frac{1}{2} BE$ & *circ* $AD \times \frac{1}{2} AD$ égaux aux deux baſes oppoſées du tronc.

Donc le ſolide du tronc conique droit à baſes oppoſées parallèles, eſt égal à trois pyramides de même hauteur que le tronc, & qui ont pour baſes, la baſe ſupérieure du tronc, la baſe inférieure du tronc, & une baſe moyenne proportionnelle entre les baſes oppoſées du même tronc.

On doit remarquer que pour avoir une moyenne proportionnelle entre les deux baſes oppoſées du tronc, il n'eſt pas néceſſaire de multiplier ces deux baſes oppoſées l'une par l'autre, & de tirer la racine quarrée de leur produit; & qu'on la trouvera plus facilement en multipliant la circonférence de la baſe ſupérieure par la moitié du rayon de la baſe inférieure, puiſqu'elle eſt égale à circ $BE \times \frac{1}{2} AD$. *On trouveroit auſſi cette baſe en multipliant la circonférence de la baſe inférieure du tronc, par la moitié du rayon de la baſe ſupérieure; puiſque* circ BE : circ $AD ::$ $BE : AD$ *ou* : : $\frac{1}{2} BE : \frac{1}{2} AD$, *& par conſéquent* circ $BE \times \frac{1}{2} AD =$ circ $AD \times \frac{1}{2} BE$.

COROLLAIRE VI.

Fig. 125. **177.** Le centre C d'un cercle ou d'une ellipſe $BDEF$ étant le centre de gravité de ſa circonférence & de ſa ſuperficie, il ſuit évidemment du Théorème *(n.° 171)* que ſi l'on fait tourner un cercle ou une

ellipſe autour d'un point fixe *A*, de manière que ſon plan ſoit continuellement perpendiculaire aux chemins parcourus par tous ſes points, la ſuperficie ou le ſolide de l'anneau engendré par ce mouvement, ſera égal au produit de la circonférence ou de la ſurface du cercle ou de l'ellipſe mobile, & de la circonférence décrite par le centre de ce cercle ou de cette ellipſe.

Il ſuit de là que la ſuperficie d'un berceau tournant, formé par le mouvement d'un demi-cercle ou d'une demi-ellipſe *BDE* autour d'un axe vertical *AZ*, eſt égale au produit de la multiplication de la circonférence de ce demi-cercle ou de cette demi-ellipſe, par la circonférence ou par la portion de circonférence qui a été décrite par le centre *C* du cercle ou de l'ellipſe. Car le centre de gravité *P* du demi-cercle ou de la demi-ellipſe étant dans une ligne perpendiculaire au diamètre *BE* ou parallèle à l'axe *AZ* de révolution, a décrit une circonférence ou une portion *PQ* de circonférence égale à la circonférence ou à la portion *CK* de circonférence décrite par le centre *C* du cercle ou de l'ellipſe. Fig. 126.

COROLLAIRE VII.

178. Lorſqu'un demi-cercle *DBE* eſt conſtruit ſur un diamètre *DE* parallèle à l'axe *AZ* autour duquel il tourne, il engendre un tore dont la ſuperficie convexe eſt égale au produit de la demi-circonférence mobile *DBE* multipliée par la circonférence ou par la portion de circonférence que décrit le centre de gravité *P* de cette demi-circonférence mobile; c'eſt-à-dire que la ſuperficie du tore produit par la révolution entière de la demi-circonférence *DBE*, eſt Fig. 127.

égale à $DBE \times circ PA$ ou à $DBE \times (circ PC + circ CA)$, ou enfin à $DBE \times circ PC + DBE \times circ CA$.

Mais la partie $DBE \times circ PC$ eſt égale à la ſurface de la ſphère qui ſeroit produite par la révolution du demi-cercle DBE ſur ſon diamètre DE.

Donc la ſuperficie du tore produit par la révolution du demi-cercle DBE autour de l'axe AZ, vaut la ſuperficie d'une ſphère qui a même diamètre que le demi-cercle générateur du tore, plus le produit de la demi-circonférence DBE multipliée par la circonférence du cercle qui a pour rayon la diſtance CA du diamètre DE à l'axe AZ de révolution.

Comme le centre de gravité P de la demi-circonférence & celui Q du quart de circonférence, ſont à la même diſtance du diamètre DE, on peut prouver directement & de la même manière que la ſurface d'un quart-de-rond décrit par la révolution d'un quart de cercle DCB autour d'un axe AZ parallèle au rayon terminateur CD du quart de cercle, vaut la ſurface d'une demi-ſphère, plus le produit du quart de circonférence BD multiplié par la circonférence du cercle qui a pour rayon la diſtance qu'il y a entre l'axe AZ de révolution & le rayon CD parallèle à cet axe.

Si l'on vouloit avoir le ſolide du tore engendré par la révolution de la ſurface du demi-cercle DBE autour de l'axe AZ, & que P fût le centre de gravité du demi-cercle générateur, on multiplieroit la ſurface de ce demi-cercle DBE par la circonférence du cercle qui auroit pour rayon la droite PA tirée perpendiculairement ſur l'axe AZ, ou par deux circonférences qui auroient pour rayons les deux parties PC, CA de la droite PA. Mais la ſurface du demi-

cercle DBE multipliée par la circonférence du cercle qui auroit PC pour rayon, eſt égale au ſolide de la ſphère qui ſeroit engendrée par la révolution du demi-cercle DBE ſur ſon diamètre DE, & qui auroit par conſéquent même diamètre que ce demi-cercle. Donc le ſolide du tore engendré par la ſurface du demi-cercle DBE dans ſa révolution autour de l'axe AZ, vaut le ſolide d'une ſphère de même diamètre que ce demi-cercle, plus le produit de la ſurface du même demi-cercle multipliée par la circonférence qui a CA pour rayon.

Il ſuit de là que le ſolide d'un quart-de-rond produit par la révolution d'un quart de cercle DCB autour d'un axe AZ parallèle au rayon terminateur CD du quart de cercle, vaut le ſolide d'une demi-ſphère qui a même rayon que le quart de cercle, plus le produit de la ſurface de ce quart de cercle multipliée par la circonférence du cercle qui a pour rayon la diſtance CA de l'axe AZ au rayon CD.

COROLLAIRE VIII.

179. Si la convexité d'un demi-cercle mobile DBE étoit tournée vers l'axe AZ de ſon mouvement, la demi-circonférence DBE engendreroit la ſurface d'une gorge ſemblable à celle d'une poulie, & la ſurface de cette gorge ſeroit égale au produit de la demi-circonférence mobile DBE multipliée par la circonférence qui auroit pour rayon la diſtance PA du centre de gravité de la demi-circonférence mobile à l'axe AZ de révolution; c'eſt-à-dire que la ſurface de cette gorge ſeroit égale à $DBE \times circ\, PA$. Fig. 128.

Mais $PA = CA - CP$; ainſi $circ\, PA = circ\, CA - circ\, CP$; & par conſéquent $DBE \times circ\, PA = DBE \times circ\, CA - DBE \times circ\, CP$.

Donc la surface de la gorge décrite par DBE est égale à $DBE \times circ CA - DBE \times circ CP$; & comme le produit $DBE \times circ CP$ est égal à la surface d'une sphère qui seroit engendrée par la révolution du demi-cercle DBE autour de son diamètre DE, la surface de la gorge est égale à la différence qu'il y a entre la surface d'une sphère qui a même diamètre que la demi-circonférence génératrice DBE de la gorge, & le produit de cette demi-circonférence génératrice multipliée par la circonférence du cercle qui auroit pour rayon la distance AC de l'axe AZ au diamètre DE.

On démontrera de la même manière que le solide propre à remplir la gorge engendrée par la révolution du demi-cercle DBE autour de l'axe AZ, est égal à la différence qu'il y a entre le solide d'une sphère de même diamètre que le demi-cercle générateur, & le produit de la surface de ce demi-cercle multipliée par la circonférence qui a pour rayon la distance AC de l'axe AZ au diamètre DE.

COROLLAIRE IX.

Fig. 129 & 130. 180. Lorsque deux arcs de cercles AHP, PGD égaux & semblables composent une doucine ou un talon $AHPGD$ en se touchant au point P où ils se raccordent, le point P de leur raccordement est leur centre de gravité commun. Ainsi lorsque la doucine ou le talon $AHPGD$ tournera autour d'un axe CF situé dans son plan, la surface engendrée par son mouvement sera égale au produit de la multiplication de cette doucine ou de ce talon, par la circonférence ou par la portion de circonférence que décrira le point de raccordement P des deux arcs AHP, PGD.

Si les deux arcs *AHP, PGD* qui compoſent la doucine ou le talon ne ſont pas ſemblables ou ne ſont pas égaux, il faudra chercher le centre de gravité de chacun des deux arcs, & multiplier chaque arc par le chemin que parcourra ſon centre de gravité, pour avoir la valeur de la ſuperficie engendrée par le mouvement de la doucine ou du talon *AHPGD.*

Il eſt aiſé de voir par le petit nombre d'exemples qu'on vient de donner, l'uſage qu'on peut faire des centres de gravité des figures, pour trouver les ſuperficies & les ſolides qu'elles engendrent par leur mouvement; ainſi nous pourrions nous abſtenir d'inſiſter davantage ſur cet uſage, ſi nous n'avions pas promis à la fin de la Géométrie de parler du toiſé des dômes, des voûtes en arc de cloître & des voûtes d'arrête.

CHAPITRE XI.

Du toiſé des Dômes, des Voûtes en arc de cloître, & des Voûtes d'arrête.

181. UN *Dôme* eſt un demi-ſphéroïde *SABCD* dont la ſurface eſt engendrée par la révolution d'une courbe *SM* autour de l'axe *SR* de ce ſphéroïde. Fig. 131.

Une *Voûte en Arc de cloître* eſt une eſpèce de dôme à pans, élevé ſur un plan rectiligne régulier ou non régulier. Sa ſurface eſt compoſée d'autant de pans *ASB, BSC, CSD, &c.* que le plan de ſa baſe a de côtés. Fig. 136, 137, 138, 139.

Lorſque deux berceaux *AEBDFC, AGDBHC* de même hauteur conſtruits ſur un même plan *ABCD* ſe croiſent, & que les parties de chaque berceau contenues dans l'autre berceau ſont ſupprimées, ce qui reſte des deux berceaux s'appelle *Voûte d'Arrête.* Fig. 140, 141 & 142.

Si l'on fait attention à la compoſition de cette voûte, on remarquera aiſément que les parties ſupprimées dans les deux berceaux pour avoir une voûte d'arrête, formeroient une voûte en arc de cloître élevée ſur le même plan $ABCD$; en ſorte que la voûte d'arrête & la voûte en arc de cloître, élevées à la même hauteur ſur un même plan $ABCD$, compoſent enſemble deux berceaux.

Chaque portion $SAEB$ de berceau ou de voûte d'arrête, compriſe entre deux arrêtes contigues SA, SB, peut s'appeller *Lunette* de voûte d'arrête.

Des Dômes.

182. On diſtingue trois ſortes de dômes; les *Dômes en plein cintre*, les *Dômes ſurbaiſſés*, & les *Dômes ſurmontés*.

Comme les dômes en plein cintre ſont des demi-ſphères, & qu'on a ſuffiſamment parlé de la ſphère & de ſes parties dans les élémens de Géométrie, il eſt inutile de s'y arrêter dans ce Traité.

Fig. 133. Un dôme ſurbaiſſé peut être formé par un quart d'ellipſe AB mû autour de la moitié BC de ſon petit axe, & le dôme ſurmonté peut être engendré Fig. 135. par la révolution d'un quart d'ellipſe AB mû autour de la moitié AC de ſon grand axe. Mais comme les dômes engendrés par des ellipſes aſſujétiroient à des ſoins qu'il ſeroit difficile de prendre dans un grand ouvrage, on forme ordinairement les dômes ſurbaiſſés & les dômes ſurmontés avec des moitiés d'anſes de panier qu'on fait tourner ſur leur petit diamètre ou ſur leur grand diamètre, ſuivant qu'on veut avoir des dômes ſurbaiſſés ou des dômes ſurmontés.

PROBLEME.

183. *Trouver la ſuperficie d'un dôme ſurbaiſſé engendrée par la révolution de la moitié* AGB *d'une anſe de panier autour de ſa montée* CB. Fig. 132.

SOLUTION.

On ſuppoſe, comme on a fait *(Géom. n.° 616)*, que la moitié *AGB* de l'anſe de panier eſt compoſée d'un arc *GB* de 30 degrés qui a ſon centre *K* dans le prolongement de la montée *CB*, & d'un arc *AG* de 60 degrés qui a ſon centre *F* dans le demi-diamètre *AC*.

La montée *CB* autour de laquelle l'arc *GB* doit tourner faiſant partie du rayon de cet arc, il eſt évident que l'arc *GB* engendrera une calotte ſphérique dont la ſuperficie ſera égale à celle du cercle qui aura pour rayon la corde *BG* de cet arc.

Si du centre de gravité *P* de l'arc *AG* de 60 degrés l'on abaiſſe une perpendiculaire *PQ* ſur le demi-diamètre *AC* de l'anſe, *CQ* ſera égal au rayon de la circonférence décrite par ce centre de gravité *P*. Ainſi la zone décrite par l'arc *AG* autour de l'axe *CB*, ſera égale au produit $AG \times circ\,QC = AG \times circ\,QF + AG \times circ\,FC$.

Mais *F* étant le centre de l'arc *AG*, la partie $AG \times circ\,QF$ eſt une zone ſphérique qui ſeroit engendrée par la révolution de l'arc *AG* autour d'un axe *FL* perpendiculaire à ſon rayon *AF*; & cette zone ſphérique eſt égale à ſa hauteur *GE* multipliée par la circonférence du cercle qui auroit *AF* pour rayon.

Donc la ſuperficie d'un dôme ſurbaiſſé engendré par la révolution de la moitié *AGB* d'une anſe de

panier, eſt compoſée de la ſurface d'un cercle qui a la corde GB pour rayon, d'une zone ſphérique qui a même rayon AF & même hauteur GE que l'arc AG, & du produit $AG \times circ\,FC$. Ainſi pour avoir la ſuperficie du dôme ſurbaiſſé, il faut trouver les valeurs de ces trois parties.

Soient tirés les rayons BK, GK & le ſinus GR de l'arc GB qu'on ſuppoſe de 30 degrés : on aura le ſinus $GR = \frac{1}{2}GK$ ou $\overline{GR}^2 = \frac{1}{4}\overline{GK}^2$. Ainſi $\overline{KR}^2$ ou $\overline{GK}^2 - \overline{GR}^2 = \overline{GK}^2 - \frac{1}{4}\overline{GK}^2 = \frac{3}{4}\overline{GK}^2$; & par conſéquent $KR = GK \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mais $BR = GK - KR$. On aura donc $BR = GK - GK \times \frac{\sqrt{3}}{2} = GK \times (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ & $\overline{BR}^2 = \overline{GK}^2 \times (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2$. Or *(Géom. n.° 308)* $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2$ étant le quarré de la différence des deux quantités 1 & $\frac{\sqrt{3}}{2}$, vaut le quarré de 1 qui eſt 1, plus le quarré de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui eſt $\frac{3}{4}$, moins deux fois le produit de 1 & de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, c'eſt-à-dire, moins le produit $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ qui eſt $\sqrt{3}$.

Ainſi $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$, & $\overline{BR}^2$ ou $\overline{GK}^2 \times (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \overline{GK}^2 \times (1 + \frac{3}{4} - \sqrt{3})$.

Donc $\overline{GB}^2$ ou $\overline{BR}^2 + \overline{GR}^2 = \overline{GK}^2 \times (1 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}) + \frac{1}{4}\overline{GK}^2 = \overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3})$.

Suppoſant que le diamètre eſt à la circonférence

comme 7 eſt à 22, on aura auſſi *(Géom. n.° 602)* le quarré du rayon à la ſurface du cercle comme 7 eſt à 22 ; c'eſt-à-dire qu'on aura la ſurface d'un cercle en multipliant le quarré de ſon rayon par $\frac{22}{7}$. Donc ſi l'on multiplie $\overline{GB}^2$ ou ſa valeur $\overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3})$ par $\frac{22}{7}$, le produit $\overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3}) \times \frac{22}{7}$ ſera la ſurface du cercle qui a OB pour rayon, ou la ſurface convexe du ſegment ſphérique engendré par l'arc GB.

Soit tiré le ſinus GE de l'arc AG qu'on ſuppoſe de 60 degrés : on trouvera ce ſinus $GE = \frac{1}{2} AF \times \sqrt{3}$ ou $AF \times \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Ainſi la zone ſphérique produite par la révolution de l'arc AG autour de l'axe FL étant *(Géom. n.° 482)* égale au produit $GE \times circ\ AF$, ſera exprimée par $AF \times \frac{1}{2}\sqrt{3} \times circ\ AF$. Mais en ſuppoſant que le rayon eſt à la circonférence comme 7 eſt à 44, on aura $circ\ AF = AF \times \frac{44}{7}$.

Donc $GE \times circ\ AF$, ou la zone ſphérique engendrée par la révolution de l'arc AG, eſt égale à $AF \times \frac{1}{2}\sqrt{3} \times AF \times \frac{44}{7} = \overline{AF}^2 \times \sqrt{3} \times \frac{22}{7}$.

L'arc AG étant de 60 degrés, ſa longueur eſt égale à $AF \times \frac{22}{21}$; & comme $circ\ FC = FC \times \frac{44}{7}$, on aura $AG \times circ\ FC = AF \times \frac{22}{21} \times FC \times \frac{44}{7}$, ou $AF \times FC \times \frac{44}{21} \times \frac{22}{7}$.

Donc pour avoir la ſuperficie d'un dôme ſurbaiſſé engendré par la révolution de la moitié AGB d'une anſe de panier autour de ſa montée CB, il faut d'abord trouver les rayons GK, AF des deux parties de la courbe génératrice, & la partie FC du diamètre de la baſe ; puis ajoûter enſemble ces trois produits $\overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3}) \times \frac{22}{7}$, $\overline{AF}^2 \times \sqrt{3} \times \frac{22}{7}$, $AF \times FC \times \frac{44}{21} \times \frac{22}{7}$; ce qui donnera $[\overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3}) + \overline{AF}^2 \times \sqrt{3} + AF \times FC \times \frac{44}{21}] \times \frac{22}{7}$ pour la ſuperficie du dôme ſurbaiſſé. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

Fig. 132. 184. Si pour $\sqrt{3}$ l'on prend 1, 732 qui n'en diffère pas de la dix-millième partie d'une unité, on aura $2 - \sqrt{3} = 0, 268$; & ſi l'on réduit en décimales la fraction $\frac{44}{21}$, on aura $\frac{44}{21} = 2, 095$,

& par conſéquent $\begin{cases} \overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3}) = \overline{GK}^2 \times 0, 268 \\ \overline{AF}^2 \times \sqrt{3} = \overline{AF}^2 \times 1, 732 \\ AF \times FC \times \frac{44}{21} = AF \times FC \times 2, 095 \end{cases}$

On aura donc la ſuperficie du dôme ſurbaiſſé,

ou $[\overline{GK}^2 \times (2 - \sqrt{3}) + \overline{AF}^2 \times \sqrt{3} + AF \times FC \times \frac{44}{21}] \times \frac{22}{7}$
$= (\overline{GK}^2 \times 0, 268 + \overline{AF}^2 \times 1, 732 + AF \times FC \times 2, 095) \times \frac{22}{7}$.

Ainſi connoiſſant le demi-diamètre AC de la baſe du dôme, & les rayons GK, AF des arcs qui compoſent ſa courbe génératrice, on trouvera la ſuperficie de ce dôme.

COROLLAIRE II.

Fig. 132. 185. On a trouvé (*Géom. n.° 618 & 619*) $\begin{cases} GK = AC + (AC - CB) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ AF = AC + (CB - AC) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ FC = (AC - CB) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{cases}$

Mais ayant fait $\sqrt{3} = 1, 732$, on aura $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1, 366$.

& par conſéquent $\begin{cases} GK = AC + (AC - CB) \times 1, 366 = AC \times 2, 366 - CB \times 1, 366 \\ AF = AC + (CB - AC) \times 1, 366 = -AC \times 0, 366 + CB \times 1, 366 \\ FC = (AC - CB) \times 1, 366 = AC \times 1, 366 - CB \times 1, 366. \end{cases}$

On aura donc $\begin{cases} \overline{GK}^2 = \overline{AC}^2 \times 5, 598 + \overline{CB}^2 \times 1, 866 - AC \times CB \times 6, 464 \\ \overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 \times 0, 134 + \overline{CB}^2 \times 1, 866 - AC \times CB \times 1, \\ AF \times FC = -\overline{AC}^2 \times 0, 5 - \overline{CB}^2 \times 1, 866 + AC \times CB \times 2, 366. \end{cases}$

$$\&\begin{cases} \overline{GK}^2 \times 0,268 = \overline{AC}^2 \times 1,5 + \overline{CB}^2 \times 0,5 - AC \times CB \times 1,732 \\ \overline{AF}^2 \times 1,732 = \overline{AC}^2 \times 0,232 + \overline{CB}^2 \times 3,232 - AC \times CB \times 1,732 \\ AF \times FC \times 2,095 = -\overline{AC}^2 \times 1,0475 - \overline{CB}^2 \times 3,910 + AC \times CB \times 4,957. \end{cases}$$

Ajoûtant enſemble ces trois équations, on aura

$$\overline{GK}^2 \times 0,268 + \overline{AF}^2 \times 1,732 + AF \times FC \times 2,095 = \overline{AC}^2 \times 0,6845 - \overline{CB}^2 \times 0,178 + AC \times CB \times 1,493;$$

& par conſéquent la ſuperficie du dôme ſurbaiſſé, c'eſt-à-dire,

$$(\overline{GK}^2 \times 0,268 + \overline{AF}^2 \times 1,732 + AF \times FC \times 2,095) \times \tfrac{22}{7}$$
$$= (\overline{AC}^2 \times 0,6845 - \overline{CB}^2 \times 0,178 + AC \times CB \times 1,493) \times \tfrac{22}{7}.$$

Ainſi connoiſſant le rayon AC de la baſe de ce dôme & ſa montée CD, on trouvera ſa ſuperficie.

EXEMPLE.

Suppoſons qu'un dôme ſurbaiſſé formé par la révolution de la moitié d'une anſe de panier, ait une baſe de 20 pieds de diamètre ou de 10 pieds de rayon, & que ſa hauteur BC *ſoit de 7 pieds.* Fig. 132.

On aura
$$\begin{cases} \overline{AC}^2 = 100 \text{ p}^{\text{ds}} \text{ quar.} & \& \ \overline{AC}^2 \times 0,6845 = 68,45 \text{ p}^{\text{ds}} \text{ quar.} \\ AC \times CB = 70 & \& \ AC \times CB \times 1,493 = 104,51 \\ & \qquad\qquad 172,96 \\ \overline{CB}^2 = 49 & \& - \overline{CB}^2 \times 0,178 = 8,722. \end{cases}$$

Ainſi $(\overline{AC}^2 \times 0,6845 - \overline{CB}^2 \times 0,178 + AC \times CB \times 1,493) \times \frac{22}{7}$
$= 164,238 \text{ p}^{\text{ds}} \text{ quar.} \times \frac{22}{7} = 516,186 \text{ p}^{\text{ds}} \text{ quar.}$

REMARQUE I.

186. Lorſqu'un dôme ſurbaiſſé eſt un demi-ſphéroïde elliptique engendré par la révolution d'un quart d'ellipſe AB autour de la moitié BC de ſon petit axe, on peut avoir ſa ſuperficie par le moyen des logarithmes, comme on va l'expliquer. Fig. 133.

Les deux droites AC, BC, perpendiculaires l'une

à l'autre, étant les moitiés du grand axe & du petit axe du quart d'ellipſe AB par lequel le demi-ſphéroïde elliptique aplati eſt engendré; ſi l'on prend ſur la moitié AC du grand axe un point F qui ſoit éloigné de l'extrémité B du petit axe d'une quantité égale à AC, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait $BF = AC$; & qu'après avoir élevé ſur AC par le point F & par tant de points qu'on voudra de FC des perpendiculaires FG, PR, QS, *&c.* l'on faſſe $FG = BF = AC$, $PR = BP$, $QS = BQ$, *&c.* enfin ſi par les points ainſi déterminés ſur ces perpendiculaires on trace une courbe $BRSG$, cette courbe ſera une portion d'*Hyperbole équilatère* dont la droite BC ſera le demi-axe; & l'on aura la proportion ſuivante, que nous ne pourrions point démontrer ſans donner une théorie aſſez étendue de l'ellipſe & de l'hyperbole, ce qui nous écarteroit trop de notre ſujet.

Comme le rectangle BCED *Eſt à la ſurface convexe d'un cylindre qui auroit* AC *pour rayon &* BC *pour hauteur;* ou *Comme* CF *ou* BD, *Eſt à* circ AC;

Ainſi l'aire du quadrilatère mixtiligne BCFG, *Eſt à la ſurface du demi-ſphéroïde elliptique aplati engendré par la révolution du quart d'ellipſe* AB *autour de la moitié* BC *de ſon petit axe.*

D'où l'on conclurra que la ſurface de ce demi-ſphéroïde eſt égale à $BCFG \times \frac{circ\ AC}{CF}$. Ainſi l'on auroit la ſuperficie de ce demi-ſphéroïde, ſi l'on connoiſſoit la valeur du quadrilatère mixtiligne $BCFG$.

Si le quadrilatère mixtiligne $BCFG$ eſt diviſé par une diagonale CG en deux parties FCG, BCG, la première

première partie FCG sera un triangle qui aura pour valeur le produit $\frac{1}{2}FG \times CF$ ou $\frac{1}{2}AC \times CF$; & l'autre partie BCG appelée *Secteur hyperbolique* sera égale au produit de $\overline{BC}^2 \times 2,302585$ multiplié par la moitié de la différence qu'il y aura entre le logarithme de $FG + CF$ ou de $AC + CF$ & le logarithme de BC; c'est-à-dire qu'on aura $BCG = \overline{BC}^2 \times 2,302585 \times \frac{1}{2}[\log(AC + CF) - \log BC]$; ce qu'on ne sauroit démontrer, sans supposer la connoissance d'un grand nombre de propriétés de l'hyperbole & des logarithmes, que nous ne pouvons point donner dans ce Traité.

Ainsi la superficie d'un dôme surbaissé en ellipse ou d'un demi-sphéroïde elliptique aplati, engendré par la révolution d'un quart d'ellipse AB autour de la moitié BC de son petit axe, sera égale à

$$\left\{\frac{1}{2}AC \times CF + \overline{BC}^2 \times 2,302585 \times \frac{1}{2}[\log(AC + CF) - \log BC]\right\} \times \frac{\text{circ } AC}{CF}$$

ou à $\text{circ } AC \times \frac{1}{2}AC + \frac{\text{circ } AC \times \overline{BC}^2}{CF} \times 2,302585 \times \frac{1}{2}[\log(AC + CF) - \log BC]$.

EXEMPLE.

Supposons qu'un dôme surbaissé formé par la révolution d'un quart d'ellipse AB *autour de la moitié* BC *de son petit axe, ait une base de 20 pieds de diamètre ou de 10 pieds de rayon, & une hauteur* BC *de 7 pieds.* Fig. 133.

Puisque le demi-diamètre AC de la base est de 10 pieds, si l'on suppose que le rayon est à la circonférence comme 7 est à 44, on aura

$\text{circ } AC \times \frac{1}{2}AC$ ou $\frac{44}{7}AC \times \frac{1}{2}AC = 314,2857$ pieds quarrés.

Et puisqu'on suppose $AC = 10$ pieds & $BC = 7$ pieds, on aura $\overline{AC}^2 = 100$ pieds quar. $\overline{BC}^2 = 49$ pieds quar. $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ ou $\overline{CF}^2 = 51$ pieds quarrés & par

conſéquent $CF = 7,14143$ p^ds. Cela poſé, ſi l'on ſuppoſe encore que le rayon eſt à la circonférence comme 7 eſt à 44, on aura

$$\frac{circ\,AC \times \overline{BC}^2}{CF} \times 2,302585 = \frac{44}{7} \times \frac{10 \times 49}{7,14143} \text{ pieds quar.} \times 2,302585$$
$$= \frac{3080}{7,14143} \text{ pieds quar.} \times 2,302585 = 993,0073 \text{ pieds quar.}$$

Comme $AC + CF = 10 + 7,14143 = 17,14143$ & $BC = 7$, on aura $log\,(AC + CF)$ ou $log\ 17,14143 = 1,23405$, & $log\,BC$ ou $log\ 7 = 0,84510$; & par conſéquent $\frac{1}{2}\,[log\,(AC + CF) - log\,BC] = 0,19447$.

On aura donc $\frac{circ\,AC \times \overline{BC}^2}{CF} \times 2,302585 \times \frac{1}{2}\,[log\,(AC + CF) - log\,BC]$
$= 993,0073$ pieds quar. $\times\ 0,19447 = 193,1142$.

Ainſi $circ\,AC \times \frac{1}{2}\,AC + \frac{circ\,AC \times \overline{BC}^2}{CF} \times 2,302585 \times \frac{1}{2}\,[log\,(AC + CF) - log\,BC]$
$= 314,2857$ pieds quar. $+\ 193,1142$ pieds quar. $= 507,4$ pieds quar.
c'eſt-à-dire que la ſurface du dôme ſurbaiſſé propoſé ſera de $507,4$ pieds quarrés.

REMARQUE II.

187. L'uſage où l'on eſt de n'admettre dans le toiſé que des règles expéditives, & de rejeter toutes les formules un peu compliquées qui peuvent échapper de la mémoire, fera ſans doute regarder comme impraticables le Problème qu'on vient de réſoudre, ſes Corollaires, & la Remarque qui les ſuit. Mais ſi l'on conſidère que ce Problème, ces Corollaires & cette Remarque, ſont des moyens pour reconnoître de combien eſt l'erreur que l'on fait dans le toiſé des dômes ou culs de four ſurbaiſſés, en ſuivant les règles reçûes dans la pratique ou celles que l'on peut imaginer; on conviendra qu'elles ſont utiles en ce qu'elles aideront & guideront même dans le choix des pra-

tiques convenables pour toiſer ces dômes avec toute la préciſion qu'on peut raiſonnablement demander.

Nous ne parlerons point ici des méthodes dont les toiſeurs font uſage, parce que nous n'en connoiſſons point qui donnent la ſuperficie des dômes ſurbaiſſés avec aſſez de préciſion pour mériter d'être examinées, ou comparées aux règles qui viennent d'être expliquées; mais nous en propoſerons une auſſi ſimple qu'on la peut deſirer, & par laquelle on trouvera la ſuperficie d'un dôme ſurbaiſſé avec une exactitude ſuffiſante pour la pratique, dans le cas où ſa hauteur ne ſera pas moindre que le quart du diamètre de ſa baſe : & comme il eſt extrêmement rare qu'on faſſe des dômes plus ſurbaiſſés, cette méthode pourra preſque toûjours avoir lieu. La voici.

On ajoûtera à la montée BC *du dôme les deux cinquièmes de la différence qu'il y aura entre cette montée & le demi-diamètre* AC *de ſa baſe; puis on multipliera cette ſomme par la circonférence de la baſe : & le produit ſera, à peu de choſe près, la valeur de la ſuperficie du dôme ſurbaiſſé.* Fig. 133.

Cette règle eſt fondée ſur ce que l'arc d'hyperbole BG peut être regardé comme un arc de parabole cubique dont BC eſt l'axe, & dont le ſegment extérieur BGD eſt égal à $\frac{2}{5} DG \times CF$ ou $\frac{2}{5}(AC - BC) \times CF$. Car, cela poſé, on aura le quadrilatère mixtiligne $BCFG$ ou $BCFD + BGD = BC \times CF + \frac{2}{5}(AC - BC) \times CF$. Ainſi multipliant chaque membre par $circ\,AC$ & diviſant par CF, on aura la ſurface du dôme, ou $\frac{BCFG \times circ\,AC}{CF} = [BC + \frac{2}{5}(AC - BC)] \times circ\,AC$.

Pour prouver la juſteſſe de cette méthode, il ſuffit

de comparer les toisés qu'on fera par son moyen avec ceux qu'on feroit par les règles qu'on a données dans le dernier Théorème, ses Corollaires & la Remarque qui les suit.

Fig. 133. *Supposons qu'un dôme surbaissé, formé par la révolution de la moitié d'une anse de panier ou d'un quart d'ellipse* AB, *ait une base de 20 pieds de diamètre ou de 10 pieds de rayon, & une hauteur* BC *de 7 pieds.*

Suivant la méthode que nous venons de proposer pour la pratique, il faudra prendre les deux cinquièmes de la différence 3 pieds qu'il y a entre le demi-diamètre de la base du dôme & sa montée, ce qui donnera $1\frac{1}{5}$ pied, qu'on ajoûtera à la montée supposée de 7 pieds, & l'on aura $8\frac{1}{5}$ pieds. Puis on multipliera cette somme par la circonférence de la base du dôme, c'est-à-dire, par la circonférence d'un cercle de 10 pieds de rayon, ou par $62\frac{6}{7}$ pieds : ce qui produira $515\frac{3}{7}$ pieds quarrés pour la superficie du dôme surbaissé proposé.

Le même dôme ayant été considéré comme engendré par la révolution de la moitié d'une anse de panier, on a trouvé *(n.° 185)* $516\frac{1}{5}$ pieds quarrés à peu de chose près pour sa surface; & en le considérant comme produit par la révolution d'un quart d'ellipse, on a trouvé sa surface de $507\frac{1}{2}$ pieds quarrés à peu de chose près. Ainsi la méthode qu'on vient de proposer pour la pratique, donne la surface d'un dôme surbaissé formé par la révolution de la moitié d'une anse de panier, avec toute la justesse qu'on peut raisonnablement demander.

Si l'on supposoit le demi-diamètre de la base du dôme de 10 pieds, & sa montée *BC* de 5 pieds, on trouveroit par la méthode qu'on vient de proposer

pour la pratique, la ſurface de ce dôme de 440 pieds q. On trouveroit *(n.° 185)* la ſurface du même dôme de $435\frac{3}{4}$ pieds quarrés, en ſuppoſant que ce dôme eſt engendré par la révolution d'une anſe de panier; & de 434 pieds quarrés, en ſuppoſant qu'il eſt produit par la révolution d'un quart d'ellipſe. Or la différence de ces deux dernières valeurs à celle qu'on a trouvée par la méthode qu'on a propoſée pour la pratique, eſt aſſez petite pour être négligée dans les toiſés.

Si le dôme avoit 10 pieds de rayon à ſa baſe & 6 pieds de montée, la règle de pratique donneroit pour ſa ſuperficie $477\frac{1}{7}$ pieds quarrés; & ſuppoſant ce dôme engendré par la révolution de la moitié d'une anſe de panier, on trouveroit ſa ſuperficie de $476\frac{1}{2}$ pieds quarrés.

Si le dôme ſurbaiſſé avoit à ſa baſe un rayon de 10 pieds avec 8 pieds de montée, la règle de pratique donneroit ſa ſuperficie de $553\frac{1}{7}$ pieds quarrés; & l'on trouveroit *(n.° 185)* la même ſuperficie de $554\frac{3}{4}$ pds q. à peu de choſe près, en ſuppoſant le dôme produit par la révolution de la moitié d'une anſe de panier.

Enfin ſi le dôme avoit une baſe de 10 pieds de rayon & une montée de 9 pieds, on trouveroit par la méthode de pratique ſa ſuperficie de $590\frac{6}{7}$ pieds quarrés; & par la méthode du n.° 185, où l'on ſuppoſe que le dôme eſt produit par la révolution de la moitié d'une anſe de panier, la ſurface du même dôme ſeroit de $592\frac{1}{8}$ pds q. à peu de choſe près.

PROBLÈME.

188. *Trouver la ſuperficie d'un dôme ſurmonté engendré par la révolution de la moitié* AGB *d'une anſe de panier autour de ſon demi-diamètre* AC. Fig. 134.

SOLUTION.

On ſuppoſe, comme dans le Problème précédent, que la moitié AGB de l'anſe de panier eſt compoſée d'un arc GB de 30 degrés qui a ſon centre K dans le prolongement de la ligne BC qui doit ſervir de rayon à la baſe du dôme, & d'un arc AG de 60 degrés qui a ſon centre F dans le demi-diamètre AC.

L'arc AG de 60 degrés étant terminé par ſon rayon AF qui fait partie du demi-diamètre AC autour duquel il doit tourner, engendrera dans ſa révolution la ſurface d'un ſegment ſphérique ; & *(Géom. n.° 484)* cette ſurface étant égale à celle d'un cercle qui auroit pour rayon la corde AG ou le rayon AF, ſera exprimée par $\overline{AF}^2 \times \frac{22}{7}$, en ſuppoſant que le diamètre eſt à la circonférence, ou le quarré du rayon à la ſurface du cercle, comme 7 eſt à 22.

Si du centre de gravité P de l'arc BG de 30 degrés l'on abaiſſe une perpendiculaire PQ ſur BC, la ligne CQ ſera égale au rayon de la circonférence décrite par le centre de gravité P de l'arc BG. Ainſi *(n.° 171)* la zone engendrée par l'arc BG ſera égale au produit $BG \times circ\, CQ$: & comme $CQ = KQ - CK$, & que $circ\, CQ = circ\, KQ - circ\, CK$, la même zone produite par la révolution de l'arc BG ſera égale à $BG \times circ\, KQ - BG \times circ\, CK$.

Mais K étant le centre de l'arc BG, le produit $BG \times circ\, KQ$ eſt une zone ſphérique qui ſeroit engendrée par la révolution de l'arc BG autour d'un axe KL perpendiculaire au bout de ſon rayon KB ; & cette zone eſt égale au produit $GR \times circ\, KB$ de ſa hauteur & de la circonférence du cercle qui auroit KB pour rayon.

Donc la ſuperficie d'un dôme ſurmonté engendré par la révolution de la moitié AGB d'une anſe de panier autour de ſon demi-diamètre AC, eſt égale à $\overline{AF}^2 \times \frac{22}{7} + GR \times \text{circ } KB - BG \times \text{circ } CK$.

La hauteur ou le ſinus GR de l'arc BG de 30 degrés étant égale à la moitié de ſon rayon KB, & ſuppoſant que le rayon eſt à la circonférence comme 7 eſt à 44, on aura

$$GR \times \text{circ } KB = \frac{KB}{2} \times KB \times \frac{44}{7} = \overline{KB}^2 \times \frac{22}{7}.$$

L'angle K du triangle rectangle FCK étant de 30 degrés, on aura $CK = CF \times \sqrt{3}$, & l'arc BG ſera la douzième partie de la circonférence qui a KB pour rayon; c'eſt-à-dire que $BG = \frac{11}{21} KB$. Ainſi $BG \times \text{circ } CK = \frac{11}{21} KB \times CF \times \sqrt{3} \times \frac{44}{7} = KB \times CF \times \sqrt{3} \times \frac{22}{21} \times \frac{22}{7}$.

Donc pour avoir la ſuperficie d'un dôme ſurmonté engendré par la révolution de la moitié AGB d'une anſe de panier autour de ſon demi-diamètre AC, il faut trouver les rayons AF, KB des deux arcs AG, BG qui compoſent la courbe génératrice AGB, & la partie FC du demi-diamètre; puis ajoûter enſemble les deux produits $\overline{AF}^2 \times \frac{22}{7}$, $\overline{KB}^2 \times \frac{22}{7}$, & retrancher enſuite de leur ſomme le produit $KB \times CF \times \sqrt{3} \times \frac{22}{21} \times \frac{22}{7}$: ce qui donnera pour la ſuperficie du dôme ſurmonté dont il eſt queſtion, $\overline{AF}^2 \times \frac{22}{7} + \overline{KB}^2 \times \frac{22}{7} - KB \times CF \times \sqrt{3} \times \frac{22}{21} \times \frac{22}{7}$. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

189. Si l'on prend 1,732 pour la racine quarrée de 3, on trouvera $\sqrt{3} \times \frac{22}{21} = 1,814$. Ainſi la Fig. 134.

ſuperficie du dôme ſurmonté, engendré par la révolution de la moitié AGB d'une anſe de panier autour de ſon demi-diamètre AC, ſera repréſentée par $(\overline{AF}^2 + \overline{KB}^2 - KB \times CF \times 1,814) \times \frac{22}{7}$. Donc ſi l'on connoît la montée AC du dôme & les rayons AF, GK des arcs qui compoſent ſa courbe génératrice, on trouvera par cette formule la ſuperficie de ce dôme.

COROLLAIRE II.

Fig. 134. 190. On a trouvé (*Géom. n.° 619*)

$$\begin{cases} KB = AC + (AC - CB) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ AF = AC + (CB - AC) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ CF = (AC - CB) \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}; \end{cases}$$

Et puiſqu'on a fait $\sqrt{3} = 1,732$, on aura $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1,366$; & par conſéquent KB ou $GK =$

$$\begin{aligned} KB &= AC \times 2,366 - CB \times 1,366 \\ AF &= -AC \times 0,366 + CB \times 1,366 \\ CF &= AC \times 1,366 - CB \times 1,366. \end{aligned}$$

Ainſi l'on trouvera

$$\begin{aligned} \overline{KB}^2 &= \overline{AC}^2 \times 5,598 + \overline{CB}^2 \times 1,866 - AC \times CB \times 8,464 \\ \overline{AF}^2 &= \overline{AC}^2 \times 0,134 + \overline{CB}^2 \times 1,866 - AC \times CB \times 1, \\ -KB \times CF \times 1,814 &= -\overline{AC}^2 \times 5,863 - \overline{CB}^2 \times 3,385 + AC \times CB \times 9,248. \end{aligned}$$

Ajoûtant enſemble ces trois équations, l'on aura

$$\overline{AF}^2 + \overline{KB}^2 - KB \times CF \times 1,814 = -\overline{AC}^2 \times 0,131 + \overline{CB}^2 \times 0,347 + AC \times CB \times 1,784.$$

Et par conſéquent la ſuperficie du dôme ſurmonté, produit par la révolution de la moitié AGB d'une anſe de panier autour du demi-diamètre AC, c'eſt-à-dire, $(\overline{AF}^2 + \overline{KB}^2 - KB \times CF \times 1,814) \times \frac{22}{7}$

$$= (\overline{CB}^2 \times 0,347 - \overline{AC}^2 \times 0,131 + AC \times CB \times 1,784) \times \frac{22}{7}.$$

Ainſi connoiſſant le demi-diamètre CB de la baſe du dôme ſurmonté & la hauteur AC de ce dôme, on trouvera ſa ſuperficie.

EXEMPLE.

Suppoſons qu'un dôme ſurmonté formé par la révolution d'une anſe de panier ait une baſe de 14 pieds de diamètre ou de 7 pieds de rayon, & que ſa hauteur AC *ſoit de 10 pieds.* Fig. 134.

$$\text{On aura} \begin{cases} \overline{CB}^2 = 49 \text{ pieds qu.} & \& \ \overline{CB}^2 \times 0,347 = 17,003 \text{ pieds quarrés} \\ AC \times CB = 70 & \& \ AC \times CB \times 1,784 = 124,88 \\ & \qquad\qquad 141,883 \\ \overline{AC}^2 = 100 & \& - \overline{AC}^2 \times 0,131 = -13,1. \end{cases}$$

Ainſi $\overline{CB}^2 \times 0,347 + AC \times CB \times 1,784 - \overline{AC}^2 \times 0,131 = 128,783$ pieds qu.

Et par conſéquent

$$(\overline{CB}^2 \times 0,347 + AC \times CB \times 1,784 - \overline{AC}^2 \times 0,131) \times \tfrac{22}{7} = 128,783 \times \tfrac{22}{7}$$

ou 404,746 pieds quarrés; c'eſt-à-dire que la ſuperficie du dôme propoſé eſt de $404\frac{3}{4}$ pieds quarrés à peu de choſe près.

REMARQUE I.

191. Lorſqu'un dôme ſurmonté eſt un demi-ſphéroïde elliptique engendré par la révolution d'un quart d'ellipſe AB autour de la moitié AC de ſon grand axe, on peut trouver ſa ſuperficie par le moyen de la quadrature d'une portion de cercle qui a pour rayon la hauteur AC du demi-ſphéroïde, comme on va l'expliquer. Fig. 135.

Ayant décrit un quart de circonférence ADG qui ait pour rayon la hauteur AC du demi-ſphéroïde alongé, ſi ſur cette hauteur AC l'on prend un point F qui ſoit éloigné de l'extrémité B du petit axe

d'une quantité égale à AC, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait $BF = AC$, & que l'on mène ſur AC par le point F une perpendiculaire FD qui rencontre le quart de circonférence en D; on aura la proportion ſuivante, que nous ne pourrions point démontrer ſans donner une théorie trop étendue de l'ellipſe.

Comme le rectangle BCFD = CF × BC
Eſt à la ſurface convexe d'un cylindre qui auroit BC *pour rayon &* BC *pour hauteur, c'eſt-à-dire, à* circ BC × BC;
ou
Comme CF
Eſt à circ BC;

Ainſi l'aire du quadrilatère mixtiligne FCGD,

Eſt à la ſurface du demi-ſphéroïde elliptique alongé, engendré par la révolution du quart d'ellipſe AB *autour de la moitié* AC *de ſon grand axe.*

Ainſi la ſurface de ce demi-ſphéroïde eſt égale à $FCGD \times \frac{circ\ BC}{CF}$; & par conſéquent l'on auroit l'étendue de cette ſuperficie, ſi l'on connoiſſoit la valeur du quadrilatère mixtiligne $FCGD$.

Soit diviſé le quadrilatère mixtiligne $FCGD$ en deux parties FCD, DCG, par le rayon CD: la première partie FCD ſera un triangle qui aura pour valeur $\frac{1}{2} BC \times CF$, parce que BF étant égal au rayon CD ou AC, les deux triangles FCD, FBC ſeront parfaitement égaux; & la ſeconde partie DCG ſera un ſecteur circulaire qui aura pour valeur $\frac{1}{2} DG \times AC$.

Donc la ſuperficie du dôme ſurmonté ou du demi-ſphéroïde elliptique alongé, produit par la révolution du quart d'ellipſe AB autour de AC, eſt égale à $(\frac{1}{2} BC \times CF + \frac{1}{2} DG \times AC) \times \frac{circ\ BC}{CF}$, c'eſt-à-dire, à $\frac{1}{2} BC \times circ\ BC + \frac{\frac{1}{2} DG \times AC \times circ\ BC}{CF}$.

EXEMPLE.

Suppoſons qu'un dôme ſurmonté, formé par la révolution d'un quart d'ellipſe AB *autour de la moitié* AC *de ſon grand axe, ait une baſe de 14 pieds de diamètre ou de 7 pieds de rayon, & que ſa hauteur* AC *ſoit de 10 pieds.* Fig. 135.

Puiſque le rayon $BC = 7$ pieds, ſi l'on ſuppoſe le rayon à la circonférence comme 7 eſt à 44, on aura $\frac{1}{2} BC \times circ\ BC = \frac{1}{2} BC \times \frac{44}{7} BC$, ou $\frac{22}{7} \overline{BC}^2 = 154$ pieds quarrés, & $circ\ BC = 44$ pieds.

Et puiſqu'on ſuppoſe AC ou $BF = 10$ pieds, & $BC = 7$ pds, on aura $\overline{BF}^2 = 100$ pds q. $\overline{BC}^2 = 49$ pds q. $\overline{BF}^2 - \overline{BC}^2$ ou $\overline{CF}^2 = 51$ pieds quarrés; & par conſéquent $CF = 7,14143$ pieds. Cela poſé, on aura

$$\frac{AC \times circ\ BC}{CF} = \frac{10 \times 44}{7,14143} \text{ \& } \frac{\frac{1}{2} DG \times AC \times circ\ BC}{CF} = \frac{DG \times 10 \times 22}{7,14143}.$$

Pour avoir la longueur de l'arc DG dont on ſait que le ſinus CF ou BD eſt de 7, 14143, on fera cette proportion :

Comme AC *ou* CD = 10 pieds,
Eſt à CF *ou* BD = 7, 14143 pieds;
Ainſi le ſinus total 10000000,
Eſt au ſinus de l'arc DG, *qu'on trouvera de* 7 141430.

Cherchant ce ſinus dans les Tables, on trouvera qu'il appartient à un arc de $45^d\ 34' \frac{1}{3}$. Ainſi l'on trouvera l'arc DG par cette proportion :

$360^d : 45^d\ 34' \frac{1}{3} :: circ\ AC$ ou $62\frac{6}{7}$ pieds $: DG = 7,957$ pieds.

On aura donc $\frac{\frac{1}{2} DG \times AC \times circ\ BC}{CF}$

ou $\frac{DG \times 220}{7,14143} = 245,124$ pieds quarrés.

Ainſi $\frac{1}{2} BC \times circ\, BC + \frac{\frac{1}{2} DG \times AC \times circ\, BC}{CF}$

$= 154^{\text{pieds quar.}} + 245, 124^{\text{p. q.}}$ ou $399, 124^{\text{p. q.}}$

c'eſt-à-dire que la ſurface du dôme ſurmonté propoſé contient $399\frac{1}{8}$ pieds quarrés à peu de choſe près.

Remarque II.

192. Si les deux règles qu'on vient de donner pour toiſer un dôme ſurmonté, ſoit qu'on le ſuppoſe engendré par la révolution de la moitié d'une anſe de panier, ou par la révolution d'un quart d'ellipſe, paroiſſent trop compoſées pour être miſes en pratique, on pourra ſe ſervir de la méthode ſuivante, qui donnera la ſurface d'un dôme ſurmonté avec toute la juſteſſe qu'on peut raiſonnablement deſirer, lorſque ſa montée ne ſurpaſſera pas le diamètre de ſa baſe.

Fig. 135. *On retranchera de la montée* AC *du dôme les deux ſeptièmes de la différence qu'il y aura entre cette montée & le demi-diamètre de la baſe ; puis on multipliera le reſte par la circonférence de la baſe : & le produit ſera, à peu de choſe près, égal à la ſuperficie du dôme ſurmonté.*

Par exemple, ſi un dôme ſurmonté formé par la révolution de la moitié d'une anſe de panier, a une baſe de 14 pieds de diamètre ou de 7 pds de rayon, & que ſa montée *AC* ſoit de 10 pieds ; comme la différence du demi-diamètre à la montée ſera de 3 pieds, les deux ſeptièmes de cette différence vaudront $\frac{6}{7}$ pieds : ainſi l'on retranchera $\frac{6}{7}$ pieds de la montée 10 pieds ; & le reſte $9\frac{1}{7}$ pieds étant multiplié par la circonférence de la baſe, c'eſt-à-dire, par 44 pieds, donnera $402\frac{2}{7}$ pds q. pour la ſuperficie du dôme ſurmonté de 14 pieds de diamètre & de 10 pieds de montée.

On a trouvé la surface du même dôme de $404\frac{3}{4}$ p. q en le supposant cintré en anse de panier, & de $399\frac{1}{8}$ pieds quarrés en le supposant cintré en ellipse.

Pour trouver la raison de cette opération, l'on mènera sur CG une perpendiculaire GH qui soit terminée par le prolongement de la droite FD; & l'on remarquera que DIG étant un arc de cercle considérablement plus petit que le quart de circonférence ADG, le triangle mixtiligne $DIGH$ sera plus grand que le quart du rectangle BH; & que le même triangle mixtiligne $DIGH$ étant plus petit qu'un triangle mixtiligne parabolique $DKGH = \frac{1}{3}\ BH$ (*n.° 148*), sera moindre que le tiers du même rectangle BH. De là on conclurra que pour avoir la valeur du quadrilatère mixtiligne $FCGD$, il faut retrancher du rectangle CH une partie plus grande que le quart & plus petite que le tiers du rectangle BH, & qu'on peut, sans craindre une erreur considérable, en retrancher les deux septièmes de BH, qui sont à peu près le milieu entre le tiers & le quart de ce rectangle.

Mais $CH = CG \times CF$ ou $AC \times CF$, & BG étant égal à $AC - BC$, on aura le rectangle $BH = (AC - BC) \times CF$ & $\frac{2}{7}BH = \frac{2}{7}(AC - BC) \times CF$. Ainsi l'on aura le quadrilatère mixtiligne $FCGD$ ou $CH - \frac{2}{7}BH = AC \times CF - \frac{2}{7}(AC - BC) \times CF = [AC - \frac{2}{7}(AC - BC)] \times CF$; & par conséquent la surface du dôme surmonté ou $FCGD \times \frac{circ\ BC}{CF} = [AC - \frac{2}{7}(AC - BC)] \times circ\ BC$; c'est-à-dire que pour avoir la valeur de la superficie d'un dôme surmonté, avec l'exactitude qu'on peut

raiſonnablement demander dans la pratique, on pourra retrancher de la montée AC les deux ſeptièmes de la différence $AC - BC$ qu'il y aura entre cette montée & le demi-diamètre de la baſe, & multiplier le reſte par la circonférence de la baſe.

Des Voûtes en arc de cloître.

Fig. 136, 137, 138 & 139.

193. Nous avons dit *(n.° 181)* qu'une voûte en arc de cloître eſt une eſpèce de dôme à pans conſtruit ſur un plan rectiligne régulier ou non régulier, & que ſa ſurface eſt compoſée d'autant de pans ASB, BSC, CSD, *&c.* que le plan de ſa baſe a de côtés.

Le point S où aboutiſſent tous les pans de la voûte s'appelle *Sommet;* & la droite SR menée de ce ſommet perpendiculairement ſur la baſe $ABCD$ ſe nomme *Montée* ou *Axe* de la voûte.

Chacune des arrêtes courbes SA, SB, SC, *&c.* où ſe raccordent les pans contigus de la voûte, eſt dans un plan mené par l'axe SR, & par conſéquent perpendiculaire au plan de la voûte.

Si l'on coupe un pan quelconque ASB de la voûte par un plan SRM mené par l'axe SR perpendiculairement à la baſe AB de ce pan, ce pan ASB ſera en plein cintre, ou ſurbaiſſé, ou ſurmonté, ſuivant que la ſection SM, qu'on appelle la *Cerce* de la voûte, ſera un quart de circonférence, ou un quart d'ellipſe qui aura RM pour la moitié de ſon grand axe & SR pour la moitié de ſon petit axe, ou un quart d'ellipſe qui aura SR pour la moitié de ſon grand axe & RM pour la moitié de ſon petit axe.

Lorſqu'une voûte en arc de cloître eſt conſtruite ſur un plan régulier, tous ſes pans ſont égaux; en ſorte que ſi l'un de ſes pans eſt en plein cintre, ou ſurbaiſſé, ou ſurmonté, tous les autres pans ſont pareillement en plein cintre, ou ſurbaiſſés, ou ſurmontés. Ainſi l'on reconnoîtra que tous les pans d'une voûte en arc de cloître ſont en plein cintre, ou ſurbaiſſés, ou ſurmontés, & que la voûte elle-même eſt en plein cintre, ou ſurbaiſſée, ou ſurmontée, lorſque ſon axe SR ſera égal à la ligne RM, ou plus petit, ou plus grand que cette ligne tirée du centre R du plan perpendiculairement ſur l'un AB de ſes côtés.

Lorſqu'une voûte en arc de cloître n'eſt pas conſtruite ſur un plan régulier; par exemple, ſi la voûte eſt conſtruite ſur un quarré long ou ſur un octogone qui ait alternativement un grand côté & un petit côté, tous les pans ne pourront pas être en plein cintre; mais quelques-uns pourront être en plein cintre pendant que les autres ſeront ſurbaiſſés ou ſurmontés. Cette voûte pourra auſſi avoir des pans ſurbaiſſés & des pans ſurmontés; enfin tous ſes pans pourront être ou ſurbaiſſés ou ſurmontés. Comme les pans de cette eſpèce de voûte ne ſeront pas égaux, il faudra trouver leur valeur ſéparément, puis les ajoûter enſemble pour avoir la ſurface de la voûte. Ainſi le toiſé de toutes les voûtes en arc de cloître conſiſte à ſavoir trouver la ſuperficie d'un pan quelconque en plein cintre, ou ſurbaiſſé, ou ſurmonté, compris entre deux plans SRA, SRB qui ſe croiſent dans l'axe SR.

194. Si l'on imagine qu'un pan quelconque ASB de voûte en arc de cloître eſt coupé ſuivant une courbe SNM par un plan SRM mené par l'axe SR

perpendiculairement à la baſe AB de ce pan, & ſi l'on conſidère que la ſurface de ce pan eſt compoſée d'une infinité de lignes ou d'élémens tels que TV parallèles à AB; on pourra ſuppoſer que tous ces élémens ſont engendrés par tous les points de la courbe SNM mûs parallèlement à la droite AB ou perpendiculairement au plan SRM de part & d'autre de ce plan, juſqu'aux deux plans SRA, SRB qui terminent le pan ASB: & comme les mouvemens de tous les points de l'arc SNM ou d'une portion quelconque SN de cet arc ſeront terminés par les deux plans SRA, SRB, le chemin parcouru par le centre de gravité P du ſyſtème de tous les points contenus dans la courbe SNM ou dans ſa portion SN, ſera une ligne droite parallèle à AB & compriſe entre les deux plans SRA, SRB.

Par la ligne IK parallèle à AB, & décrite par le centre de gravité P de la courbe SNM, ou d'une portion SN de cette courbe, ſoit imaginé un plan IQK parallèle à la baſe $ABCD$ de la voûte : les droites IQ, KQ, PQ, ſuivant leſquelles le plan IQK ſera rencontré par les plans SRA, SRB, SRM, ſeront parallèles aux droites AR, BR, MR, ſuivant leſquelles la baſe de la voûte ſera coupée par les mêmes plans SRA, SRB, SRM. Ainſi les triangles ARM, BRM ſeront ſemblables aux triangles IQP, KQP.

Les triangles ſemblables ARM, IQP donneront $MR : AM :: PQ : PI$; & par conſéquent $PI = PQ \times \frac{AM}{MR}$.

Les triangles ſemblables BRM, KQP donneront MR:

$MR : BM :: PQ : KP$, & par conſéquent $PK = PQ \times \frac{BM}{MR}$.

On aura donc $PI + PK$ ou $IK = PQ \times \frac{AM+BM}{MR} = PQ \times \frac{AB}{MR}$.

Mais *(n.° 171)* ſi P eſt le centre de gravité de la courbe SM ou du ſyſtème de tous les points générateurs des élémens du pan ASB ou de ſes deux parties ASM, BSM; les produits $SM \times PI$, $SM \times PK$, $SM \times IK$ ſeront égaux aux ſurfaces ASM, BSM, ASB engendrées par toutes les parties de la courbe SM, pendant que le centre de gravité P de leur ſyſtème parcourra les lignes PI, PK, IK. Ainſi les produits $SM \times PQ \times \frac{AM}{MR}$, $SM \times PQ \times \frac{BM}{MR}$, $SM \times PQ \times \frac{AB}{MR}$ ſeront auſſi les valeurs des ſurfaces des deux parties ASM, BSM, & de la totalité ASB du pan. Cela poſé, l'on va trouver la ſurface d'un pan de voûte en arc de cloître, ſoit en plein cintre, ſoit ſurbaiſſé, ſoit ſurmonté.

Pour un pan en plein cintre, de voûte en arc de cloître.

195. Lorſqu'un pan ASB ſera en plein cintre, c'eſt-à-dire, lorſque la courbe SNM ſera un quart de circonférence, & que P ſera ſon centre de gravité, on trouvera *(n.° 77)* $PQ = \frac{\overline{MR}^2}{SNM}$. Ainſi l'on aura $SNM \times PQ = \overline{MR}^2$; & par conſéquent la ſurface du pan ASB, repréſentée par $SNM \times PQ \times \frac{AB}{MR}$, Fig. 136 & 137.

ſera égale à $\overline{MR}^2 \times \frac{AB}{MR} = AB \times MR$, ou $AB \times SR$.

Chaque pan d'une voûte en arc de cloître en plein cintre étant égal au produit de la multiplication de la ligne AB qui ſert de baſe à ce pan, par l'axe SR de la voûte; il eſt évident que la ſurface entière de cette voûte eſt égale au produit de la multiplication du contour $ABCD$ de ſa baſe par ſon axe SR.

Comme le produit $AB \times MR$, qui eſt égal au pan en plein cintre ASB, vaut le double du triangle ARB qui répond perpendiculairement à ce pan, & qui peut être appelé le plan de ce pan; il eſt clair que chaque pan en plein cintre eſt double de ſon plan, & que la ſuperficie entière d'une voûte en arc de cloître en plein cintre, ou compoſée de pans en plein cintre, eſt double de la ſuperficie de ſon plan.

Si le point P eſt le centre de gravité de la portion de courbe SN ou du ſyſtème de tous les points qui engendrent la portion de pan TSV, & que IK ſoit le chemin parcouru par ce centre de gravité P, on aura la ſurface de la portion $TSV = SN \times IK$: & comme $IK = PQ \times \frac{AB}{MR}$, on aura la portion de pan $TSV = SN \times PQ \times \frac{AB}{MR}$.

Si TSV eſt une portion de pan en plein cintre, & que par le point N on mène NO perpendiculairement à l'axe SR, on trouvera (*n.° 77*) $PQ = \frac{MR \times SO}{SN}$ ou $\frac{SR \times SO}{SN}$; & par conſéquent $SN \times PQ = MR \times SO$. Ainſi l'on aura la ſurface de la portion de pan TSV en plein cintre, ou

$SN \times PQ \times \frac{AB}{MR} = MR \times SO \times \frac{AB}{MR} = AB \times SO$;

c'eſt-à-dire qu'une portion de pan TSV terminée par une droite TV parallèle à la baſe AB du pan, eſt égale au produit de cette baſe AB multipliée par la portion d'axe SO terminée par la ligne NO perpendiculaire à cet axe.

Si tous les pans de la voûte en arc de cloître étoient tronqués par un plan mené par la droite TV parallèlement à la baſe $ABCD$ de la voûte, chaque portion de pan ſupérieure au plan de ſection ſeroit égale au produit de la baſe de ce pan multipliée par SO. Ainſi la ſurface de toute la portion de la voûte ſupérieure au plan de ſection, ſera égale au produit du contour $ABCD$ de la baſe, multiplié par SO.

Puiſque le pan en plein cintre $ASB = AB \times SR$, & que ſa portion $TSV = AB \times SO$, il eſt clair que ſa portion $ABVT = AB \times OR$.

Et puiſque toute la voûte en plein cintre eſt égale au produit du contour de ſa baſe $ABCD$ & de ſon axe SR, & qu'après avoir coupé cette voûte par un plan parallèle à ſa baſe, toute la portion de voûte ſupérieure au plan de ſection eſt égale au produit du contour $ABCD$ de la baſe multiplié par la portion SO de l'axe ſupérieure au plan de ſection; il eſt clair que la portion de voûte inférieure au plan de ſection eſt égale au produit du contour de la baſe $ABCD$ multipliée par la portion d'axe OR inférieure au plan de ſection.

On peut conclurre de là que toute portion de voûte en arc de cloître, compriſe entre deux plans parallèles à ſa baſe $ABCD$, eſt égale au produit du contour de cette baſe $ABCD$ multiplié par la portion

d'axe compriſe entre ces deux plans parallèles ; & que chaque portion de pan compriſe entre les mêmes plans parallèles eſt égale à la baſe de ce pan multipliée par la portion d'axe compriſe entre ces plans parallèles.

Si l'on ſe rappelle ce qui a été dit dans les Elémens de Géométrie au ſujet de la ſurface de la ſphère, de la ſurface d'un ſegment, & de celle d'une zone compriſe entre deux plans parallèles ; on reconnoîtra aiſément que les méthodes qu'on a données pour toiſer ces ſurfaces, peuvent ſervir à toiſer celle d'une voûte en arc de cloître en plein cintre, celles de ſes portions compriſes entre ſon ſommet ou ſa baſe & un plan parallèle à la baſe, & celles de toutes les parties contenues entre deux plans parallèles à la baſe.

PROBLEME.

196. *Trouver la ſurface d'un pan ſurbaiſſé ou ſurmonté de voûte en arc de cloître.*

SOLUTION.

Fig. 138 & 139. Un pan ſurbaiſſé ou ſurmonté de voûte en arc de cloître peut être cintré en anſe de panier ou en ellipſe ; c'eſt-à-dire que la rencontre SM de ce pan avec le plan SRM mené par l'axe SR perpendiculairement ſur la baſe AB de ce pan, peut être une moitié d'anſe de panier ou un quart d'ellipſe. Ainſi il eſt à propos de réſoudre le Problème pour ces deux cas, & de déduire de leurs ſolutions, qui ſeroient trop embarraſſantes dans la pratique, des méthodes plus ſimples qui, quoique moins exactes, peuvent faire trouver l'étendue de la ſurface demandée avec toute la juſteſſe qu'on peut raiſonnablement deſirer pour les toiſés.

On a vû *(n.° 194)* que (quelle que ſoit la courbe

SM dont on ſuppoſe que le centre de gravité P décrit la ligne IK, pendant que le pan ASM eſt engendré) la ſurface du pan ASM ſera repréſentée par $SM \times IK = SM \times PQ \times \frac{AB}{RM}$.

Mais ſi la courbe SM tournoit autour de l'axe SR, & engendroit un dôme ſurbaiſſé ou ſurmonté, la ſurface de ce dôme ſeroit égale au produit $SM \times circ\ PQ$. Ainſi l'on aura cette proportion :

Comme SM × circ PQ / *Eſt à* SM × PQ × $\frac{AB}{RM}$ } ou { *Comme* circ PQ × RM / *Eſt à* PQ × AB } ou { *Comme* circ RM / *Eſt à* AB ;

Ainſi la ſurface d'un dôme ſurbaiſſé ou ſurmonté qui a même axe SR *& même diamètre* RM *qu'un pan* ASB *de voûte en arc de cloître,*

Eſt à la ſurface de ce pan ASB.

On aura donc la ſurface d'un pan ſurbaiſſé ou ſurmonté ASB de voûte en arc de cloître, en multipliant par $\frac{AB}{circ\ RM}$ la ſurface d'un dôme ſurbaiſſé ou ſurmonté de même diamètre & de même montée que ce pan.

Or ſi l'on ſuppoſe que le rayon eſt à ſa circonférence comme 7 eſt à 44, c'eſt-à-dire, ſi l'on ſuppoſe $circ\ RM = RM \times \frac{44}{7} = 2\ RM \times \frac{22}{7}$, on aura $\frac{AB}{circ\ RM} = \frac{AB}{2\ RM \times \frac{22}{7}}$; ainſi l'on trouvera la ſurface d'un pan ſurbaiſſé ou ſurmonté de voûte en arc de cloître, en diviſant par $\frac{22}{7}$ la ſurface d'un dôme de même diamètre & de même montée que ce pan, & en multipliant le quotient par $\frac{AB}{2\ RM}$.

Cela posé, on va déterminer la surface d'un pan de voûte en arc de cloître relativement à son axe SR, à son demi-diamètre MR, & à sa base AB, dans le cas où la courbe SM est une moitié d'anse de panier, & dans celui où elle est un quart d'ellipse.

Pour un pan surbaissé, lorsque la courbe SM *est une moitié d'anse de panier.*

Fig. 138. 197. On trouvera (*n.° 185*) qu'en mettant RM pour AC & SR pour BC, la surface d'un dôme surbaissé qui auroit RM pour demi-diamètre, SR pour montée, & qui seroit engendré par la révolution d'une moitié SM d'anse de panier, est égale à $(\overline{RM}^2 \times 0,6845 - \overline{SR}^2 \times 0,178 + RM \times SR \times 1,493) \times \frac{22}{7}$.

Ainsi divisant cette expression du dôme surbaissé par $\frac{22}{7}$, & multipliant le quotient par $\frac{AB}{2RM}$, on aura

$$(\overline{RM}^2 \times 0,6845 - \overline{SR}^2 \times 0,178 + RM \times SR \times 1,493) \times \frac{AB}{2RM}$$

ou $$\left(RM \times 0,6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} + SR \times 1,493\right) \times \frac{1}{2} AB$$

pour la surface d'un pan ASB surbaissé en anse de panier. *C. Q. F. T.*

EXEMPLE.

On propose de trouver la surface d'un pan surbaissé en anse de panier, dans lequel RM = 10 pieds, SR = 7 pieds, *&* AB = 20 pieds.

On aura
$RM \times 0,6845$ ou $10^{\text{pieds}} \times 0,6845 = 6,845^{\text{pieds}}$
$-\frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM}$ ou $-\frac{49^{\text{p.}} \times 0,178}{10} = -0,472$
$SR \times 1,493$ ou $7^{\text{pieds}} \times 1,493 = 10,451$

Et $RM \times 0,6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} + SR \times 1,493 = 16,824^{\text{pieds}}$

Ainſi $(RM \times 0,6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} + SR \times 1,493) \times \frac{1}{2} AB$,

ou 16,824 pieds × 10 pieds = 168,24 pieds quarrés; c'eſt-à-dire que la ſuperficie du pan ſurbaiſſé propoſé ASB contient $168\frac{1}{4}$ pieds quarrés à peu de choſe près.

Pour un pan ſurmonté, lorſque la courbe SM *eſt une moitié d'anſe de panier.*

198. On trouvera *(n.° 190)* qu'en mettant RM pour BC & SR pour AC, la ſurface d'un dôme ſurmonté qui auroit RM pour demi-diamètre, SR pour montée, & qui ſeroit engendré par la révolution d'une moitié SM d'anſe de panier, eſt égale à $(\overline{RM}^2 \times 0,347 - \overline{SR}^2 \times 0,131 + SR \times RM \times 1,784) \times \frac{22}{7}$. Fig. 139.

Ainſi diviſant cette expreſſion du dôme ſurmonté par $\frac{22}{7}$ & multipliant le quotient par $\frac{AB}{2RM}$, on aura

$$(\overline{RM}^2 \times 0,347 - \overline{SR}^2 \times 0,131 + SR \times RM \times 1,784) \times \frac{AB}{2RM}$$

ou $(RM \times 0,347 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} + SR \times 1,784) \times \frac{1}{2} AB$

pour la ſurface du pan ASB ſurmonté en anſe de panier.

EXEMPLE.

On propoſe de trouver la ſurface d'un pan ſurmonté en anſe de panier, dans lequel RM = 7 pieds SR = 10 pieds, *&* AB = 14 pieds.

On trouvera
- $RM \times 0,347$ ou 7 pieds × 0,347 = 2,429 pieds
- $-\frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM}$ ou $\frac{100 \text{ p.} \times 0,131}{7}$ = − 1,871
- $SR \times 1,784$ ou 10 pieds × 1,784 = 17,84

Et $RM \times 0,347 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} + SR \times 1,784$ = 18,398 pieds

Ainſi $(RM \times 0,347 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} + SR \times 1,784) \times \frac{1}{2} AB$ ou $18,398$ pieds $\times$ 7 pieds $= 128,786$ pieds quarrés; c'eſt-à-dire que la ſurface du pan ſurmonté propoſé ASB contient environ $128\frac{2}{3}$ pieds quarrés.

Pour un pan ſurbaiſſé, lorſque la courbe SM *eſt un quart d'ellipſe.*

Fig. 138. 199. Si l'on prend ſur le demi-diamètre MR un point F qui ſoit éloigné du ſommet S de la voûte d'une quantité égale à ce demi-diamètre, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait $SF = RM$, on trouvera *(n.° 186)* qu'en mettant RM pour AC, SR pour BC, RF pour CF, la ſurface du dôme ſurbaiſſé en ellipſe qui auroit RM pour demi-diamètre, & SR pour axe, ſeroit égale à

$$circ\,RM \times \tfrac{1}{2} RM + circ\,RM \times \frac{\overline{SR}^2}{RF} \times 2,302585 \times \tfrac{1}{2} [log(RM + RF) - log\,SR].$$

Ainſi *(n.° 196)* en multipliant cette quantité par $\frac{AB}{circ\,RM}$, c'eſt-à-dire, en la diviſant par $circ\,RM$, & multipliant enſuite le quotient par AB, le réſultat

$$AB \times \tfrac{1}{2} RM + AB \times \frac{\overline{SR}^2}{RF} \times 2,302585 \times \tfrac{1}{2} [log(RM + RF) - log\,SR]$$

ſera la ſurface du pan ASB ſurbaiſſé en ellipſe. *C. Q. F. T.*

EXEMPLE.

Suppoſons qu'un pan ASB *ſurbaiſſé en ellipſe ait une longueur* AB $=$ 20 pieds, *un demi-diamètre* RM $=$ 10 pieds, *& une montée* SR $=$ 7 pieds.

Comme on trouvera *(n.° 186)* $RF = 7,14143$ pieds, & $\frac{1}{2} [log(RM + RF) - log\,SR] = 0,19447$;

on aura $AB \times \frac{1}{2}RM = 100$ pieds quarrés, &

$$AB \times \frac{\overline{SR}^2}{RF} \times 2,302585 \times \tfrac{1}{2}[log(RM+RF) - log SR]$$

$$= 20^{pds} \times \frac{49 \text{ pieds}}{7,14143} \times 2,302585 \times 0,19447 = 61,45^{pds\ q.}$$

Ainſi $AB \times \frac{1}{2}RM + AB \times \frac{\overline{SR}^2}{RF} \times 2,302585 \times \frac{1}{2}[log(RM+RF) - log SR]$

$= 161,45$ pieds quarrés; c'eſt-à-dire que la ſuperficie du pan propoſé eſt de $161\frac{1}{2}$ pieds quarrés à peu de choſe près.

Pour un pan ſurmonté, lorſque la courbe SM *eſt un quart d'ellipſe.*

200. Si du point R comme centre on décrit par le ſommet S un quart de circonférence SHG, & qu'après avoir pris ſur SR un point F qui ſoit éloigné du point M d'une quantité égale à SR, on mène par ce point F perpendiculairement ſur SR une droite FH qui rencontre le quart de circonférence en H; on trouvera *(n.° 191)* que la ſurface d'un dôme ſurmonté en ellipſe, qui auroit RM pour le rayon de ſa baſe & SR pour hauteur eſt égale à $circ\,RM \times \frac{1}{2}RM + \frac{HG \times SR \times circ\,RM}{2\,RF}$. Fig. 139.

Ainſi *(n.° 196)* en multipliant cette quantité par $\frac{AB}{circ\,RM}$, c'eſt-à-dire, en la diviſant d'abord par $circ\,RM$, & la multipliant enſuite par AB, le réſultat $AB \times \frac{1}{2}RM \times \frac{HG \times SR \times AB}{2\,RF}$ ſera la valeur du pan ASB ſurmonté en ellipſe. *C. Q. F. T.*

EXEMPLE.

Suppoſons qu'un pan ſurmonté en ellipſe ſoit conſtruit de maniere que AB = 14 pieds, RM = 7 pieds, SR = 10 pieds.

On trouvera, comme dans l'exemple du n.° 191, $RF = 7,14143$ pieds, $HG = 7,957$ pieds. Cela poſé, on aura $\frac{1}{2}AB \times RM = 49$ pieds quarrés & $\frac{HG \times SR \times AB}{2RF} = \frac{7,957 \text{ pieds} \times 10 \text{ pieds} \times 14 \text{ pieds}}{2 \times 7,14143 \text{ pieds}} = 78$ pieds qu.

Ainſi l'on trouvera la ſurface du pan propoſé *ASB*, ſavoir, $\frac{1}{2}AB \times RM + \frac{HG \times SR \times AB}{2RF} = 49$ pieds quarrés $+ 78$ pieds quarrés $= 127$ pieds quar.

COROLLAIRE.

201. Comme les voûtes en arc de cloître conſtruites ſur des plans réguliers ou irréguliers ne peuvent être compoſées que de trois ſortes de pans, ſavoir, de pans en plein cintre, de pans ſurbaiſſés & de pans ſurmontés, & qu'on vient de donner des méthodes pour toiſer ces trois eſpèces de pans; il eſt évident que ces méthodes ſont ſuffiſantes pour toiſer toutes ſortes de voûtes en arc de cloître.

REMARQUE.

Les méthodes qu'on vient de donner pour toiſer les pans de voûtes en arc de cloître étant trop compoſées pour être miſes en pratique, on remarquera, comme on a fait *(n.os 187 & 192)*, qu'on peut leur ſubſtituer des règles extrêmement ſimples qui donneront les aires des pans ſurbaiſſés ou ſurmontés avec autant de juſteſſe qu'on peut le ſouhaiter pour les toiſés. Voici ces règles.

Pour toiſer un pan ſurbaiſſé de voûte en arc de cloître.

202. On ajoûtera à la hauteur de l'axe SR les deux cinquièmes de la différence qu'il y aura entre cet axe & la perpendiculaire RM tirée du pied de l'axe ſur la baſe AB du pan ASB qu'on voudra toiſer; puis on multipliera cette ſomme par la longueur de la baſe AB du pan: & le produit ſera la ſurface ou l'aire de ce pan. Fig. 138.

Suppoſons, par exemple, que dans le pan ASB qu'on veut toiſer, l'on trouve $AB = 20$ pieds, $RM = 10$ pieds, $SR = 7$ pieds.

La différence qu'il y aura entre RM & SR ſera de 3 pieds, & les deux cinquièmes de cette différence vaudront $1\frac{1}{5}$ pied. Ainſi on ajoûtera $1\frac{1}{5}$ pied à l'axe $SR = 7$ pieds, & l'on multipliera la ſomme $8\frac{1}{5}$ pieds par la baſe $AB = 20$ pieds; ce qui donnera 164 pieds quarrés pour la valeur de la ſurface du pan propoſé ASB.

On a déjà trouvé la ſurface de ce pan de $164\frac{1}{4}$ pds qu. en ſuppoſant qu'il eſt cintré en anſe de panier; & de $161\frac{1}{2}$ pieds quarrés, en ſuppoſant qu'il eſt cintré en ellipſe.

Pour toiſer un pan ſurmonté de voûte en arc de cloître.

203. On retranchera de l'axe ou montée SR les deux ſeptièmes de la différence qu'il y aura entre cet axe & la perpendiculaire RM tirée de ſon pied ſur la baſe AB du pan ASB qu'on voudra toiſer; puis on multipliera le reſte par la longueur de la Fig. 139.

baſe AB du pan : & le produit ſera la valeur de ce pan.

Si l'on propoſe, par exemple, de toiſer un pan ASB, dans lequel $AB = 14$ pieds, $RM = 7$ pieds, $SR = 10$ pieds :

La différence qu'il y aura entre SR & RM ſera de 3 pieds, & les deux ſeptièmes de cette différence vaudront $\frac{6}{7}$ pied. Ainſi l'on retranchera $\frac{6}{7}$ pied de la montée $SR = 10$ pieds ; & l'on multipliera le reſte $9\frac{1}{7}$ pieds par $AB = 14$ pieds : ce qui donnera 128 pieds quarrés pour la valeur du pan propoſé ASB.

On a déjà trouvé la ſurface de ce pan de $128\frac{3}{4}$ *pds qu. en le ſuppoſant ſurmonté en anſe de panier ; & de* 127 *pieds quarrés en le ſuppoſant ſurmonté en ellipſe.*

Des Voûtes d'arrête.

Fig. 140, 141 & 142. **204.** Lorſque deux berceaux $AEBCFD$, $AGDCHB$ de même montée & conſtruits ſur un même plan $ABCD$ ſe croiſent, & que les parties de chaque berceau contenues dans l'autre berceau ſont ſupprimées, nous avons dit *(n.° 181)* que les parties reſtantes des deux berceaux compoſent une *Voûte d'arrête.*

Fig. 143. Il arrive ſouvent qu'on fait croiſer un plus grand nombre de berceaux, & que l'on ſupprime les parties de chaque berceau qui ſont au dedans des autres berceaux, alors ce qui reſte de tous ces berceaux s'appelle auſſi une *voûte d'arrête.*

Fig. 140, 141, 142 & 143. Les lignes courbes AS, BS, CS, DS, *&c.* où les ſurfaces des berceaux ſe rencontrent, s'appellent *Arrêtes* de la voûte. Toutes ces arrêtes doivent aboutir à un même point S qu'on appelle *Sommet* de la voûte,

& chacune d'elles doit être dans un plan perpendiculaire au plan de la baſe de la voûte.

Puiſque tous les plans *ASR, BSR, CSR, DSR, &c.* dans leſquels ſont les arrêtes de la voûte, ſont perpendiculaires au plan de ſa baſe *ABCD,* & paſſent par le ſommet *S* où aboutiſſent toutes les arrêtes, ils ſe croiſent néceſſairement dans une même droite *SR* perpendiculaire au plan de la voûte, & qu'on appelle *Axe* ou *Montée* de la voûte.

Chaque portion *SBHCS* de la voûte d'arrête, compriſe entre deux arrêtes voiſines *BS, CS,* ſe nomme *Lunette* de voûte d'arrête.

Une voûte d'arrête eſt compoſée d'autant de lunettes que le plan de ſa baſe a de côtés. Si le plan de la baſe eſt un quadrilatère, la voûte a quatre lunettes; ſi le plan eſt un hexagone, la voûte a ſix lunettes, & ainſi des autres.

On conſtruit ordinairement les voûtes d'arrête ſur des plans dont le nombre des côtés eſt pair, afin que les arrêtes priſes deux à deux ſoient oppoſées & contenues dans un même plan. Mais rien n'empêche qu'on ne conſtruiſe une voûte d'arrête ſur un plan dont le nombre des côtés eſt impair : alors les arrêtes de cette voûte ne ſont pas deux à deux dans un même plan.

Les lunettes d'une voûte d'arrête ſont égales ou inégales ſuivant que le plan de la voûte eſt régulier ou non régulier. Il peut cependant arriver qu'une voûte d'arrête conſtruite ſur un plan irrégulier, par exemple, ſur une lozange, ait des lunettes égales. Ainſi lorſqu'on aura trouvé une lunette de voûte d'arrête conſtruite ſur un plan régulier, il ſuffira de multiplier ſa valeur par le nombre des côtés du plan de la voûte, pour avoir

la ſuperficie de la voûte entière. Mais ſi la voûte n'eſt pas conſtruite ſur un plan régulier, on ſera obligé de chercher la valeur de chaque lunette en particulier, ou de chercher au moins la valeur de chaque lunette qui ne ſera pas égale à quelqu'une de celles qu'on aura toiſées.

On diſtingue trois ſortes de lunettes de voûte d'arrête, les lunettes en plein cintre, les lunettes ſurbaiſſées, & les lunettes ſurmontées. Les lunettes en plein cintre ſont des portions de berceaux en plein cintre; les lunettes ſurbaiſſées ſont des portions de berceaux ſurbaiſſés; & les lunettes ſurmontées ſont des portions de berceaux ſurmontés.

Comme les voûtes d'arrête les plus irrégulières ne peuvent être compoſées que de ces trois eſpèces de lunettes, il eſt clair qu'on ſaura toiſer toutes ſortes de voûtes d'arrête lorſqu'on aura des méthodes pour toiſer les lunettes en plein cintre, les lunettes ſurbaiſſées & les lunettes ſurmontées.

Pour parvenir au toiſé d'une lunette quelconque $SBHCS$ de voûte d'arrête, on abaiſſera du ſommet de la voûte une perpendiculaire SR ſur ſon plan; & du point R où ce plan ſera rencontré, on imaginera deux droites RB, RC tirées aux extrémités B, C du diamètre de la lunette. La ligne SR qui eſt l'axe ou la montée de la voûte ſe nommera *Montée* de la lunette; le triangle BRC s'appellera *Plan* ou *Baſe* de la lunette; & les deux plans SRB, SRC, qui ſeront néceſſairement perpendiculaires au plan de la voûte, ſe nommeront *Plans des arrêtes* de la lunette. Enfin ſi par l'axe SR de la voûte & par le milieu L du diamètre BC de la face de la lunette, on imagine un plan $SRLH$, la ligne SH où la ſuperficie

de la lunette ſera rencontrée ſe nommera *Longueur* de la lunette : & comme la droite RL, où la baſe de la lunette ſera rencontrée par le même plan, ſera égale à SH, on la nommera auſſi *Longueur* de la lunette.

Une lunette $SBHCS$ de voûte d'arrête peut donc être conſidérée comme une portion de berceau compriſe entre deux plans SRB, SRC menés par les extrémités du diamètre BC d'une face BHC de ce berceau, & par une ligne SR tirée dans la face oppoſée MSN du même berceau perpendiculairement au milieu du diamètre MN de cette face. Fig. 144, 145 & 146.

En conſidérant ainſi une lunette de voûte d'arrête, on reconnoîtra aiſément que le toiſé de ſa ſurface ſe réduit à retrancher d'un berceau de même longueur SH que cette lunette, deux pans MSB, NSC qui peuvent être regardés comme des pans ou des portions de pans de voûte en arc de cloître. Cela poſé, on va donner des méthodes pour toiſer une lunette de voûte d'arrête en plein cintre, ou ſurbaiſſée ou ſurmontée.

Pour une lunette en plein cintre de voûte d'arrête.

205. Si le berceau $BHCNSM$ eſt droit & en plein cintre, ſes faces oppoſées BHC, MSN ſeront des demi-cercles parallèles & perpendiculaires à ſa longueur ; ainſi la ſurface convexe de ce berceau ſera égale au produit de la demi-circonférence BHC multipliée par la longueur SH ou RL ou MB. Fig. 144.

Or en ſuppoſant que le diamètre d'un cercle eſt à ſa circonférence comme 7 eſt à 22, on aura la demi-circonférence $BHC = \frac{11}{7} BC$; ainſi la ſurface

du berceau compris entre les deux demi-cercles parallèles BHC, MSN ſera égale au produit $\frac{11}{7} BC \times MB$.

Mais la partie BSM du berceau pouvant être regardée comme une portion en plein cintre de pan de voûte en arc de cloître, ſa ſurface ſera égale au parallélogramme ML ou au double du triangle BRM *(n.° 195)*; & l'autre partie CSN du berceau ſera par la même raiſon égale au parallélogramme NL. Ainſi la ſomme des deux parties BSM, CSN qu'il faudra retrancher du berceau, pour avoir la lunette $SBHCS$, ſera égale au parallélogramme $MBCN = BC \times MB$; parce que le berceau étant ſuppoſé droit, ſa baſe $MBCN$ eſt un rectangle.

Donc la ſuperficie de la lunette en plein cintre $SBHCS = \frac{11}{7} BC \times MB - BC \times MB = \frac{4}{7} BC \times MB$; c'eſt-à-dire que la ſurface d'une lunette $SBHCS$ en plein cintre eſt égale aux quatre ſeptièmes du rectangle $MBCN$, ou aux huit ſeptièmes du triangle BRC qui ſert de baſe à cette lunette.

Si le berceau, quoiqu'en plein cintre, n'étoit pas droit, c'eſt-à-dire, ſi le plan $MBCN$ de ce berceau n'étoit pas un parallélogramme rectangle, la ſurface de la lunette $SBHCS$ ſeroit encore égale aux huit ſeptièmes de ſa baſe triangulaire BRC. Car ſi l'on menoit par SR un plan SRO perpendiculaire à MB, la rencontre RO de ce plan avec la baſe $MBCN$ ſeroit perpendiculaire à MB, & ſa rencontre SO avec la ſurface du berceau ſeroit un quart de cercle, puiſqu'on ſuppoſe le berceau en plein cintre. Ainſi *(n.° 195)* la ſurface de MSB ſeroit égale au double du triangle MRB ou égale au parallélogramme oblique $ML = MB \times RO$.

La ſurface du demi-cylindre $SHBM$ ſeroit égale

à

à $SO \times MB$: & comme on auroit $SO = \frac{14}{7} RO$, en ſuppoſant que le rayon eſt au quart de circonférence comme 7 eſt à 11, on trouveroit le demi-berceau $SHBM = \frac{11}{7} RO \times MB$.

On trouveroit donc la ſurface de la demi-lunette $SBH = \frac{11}{7} RO \times MB - RO \times MB = \frac{4}{7} RO \times MB$; c'eſt-à-dire qu'elle ſeroit égale aux quatre ſeptièmes du parallélogramme ML ou aux huit ſeptièmes de ſa baſe triangulaire BRL.

Par la même raiſon, l'autre demi-lunette SCH ſeroit égale aux huit ſeptièmes de ſa baſe CRL.

Donc la lunette entière $SBHCS$ en plein cintre, qui fait partie d'un berceau oblique en plein cintre, eſt égale aux huit ſeptièmes de ſa baſe BRC.

Il ſuit de-là qu'une voûte d'arrête dont toutes les lunettes ſont en plein cintre eſt égale aux huit ſeptièmes de la ſuperficie de ſon plan. Car chaque lunette eſt égale aux huit ſeptièmes de ſa baſe triangulaire; & les baſes triangulaires de toutes les lunettes compoſent enſemble la baſe entière de la voûte d'arrête.

On remarquera que la face BHC *d'un berceau oblique en plein cintre n'eſt pas un demi-cercle, & qu'on appelle berceau en plein cintre tout berceau dont la coupe perpendiculaire à ſa longueur eſt un demi-cercle.*

Pour une lunette ſurbaiſſée de voûte d'arrête.

206. Une lunette ſurbaiſſée $SBHCS$ eſt une portion de berceau ſurbaiſſé coupé par deux plans SRB, SRC perpendiculaires à ſa baſe $MBCN$ avec les conditions que nous avons expliquées *(n.° 204)*. Ainſi pour avoir la ſurface de la lunette ſurbaiſſée $SBHCS$, il faut toiſer le berceau compris entre les Fig. 145.

deux faces parallèles *BHC, MSN;* puis en retrancher les valeurs des deux pans *MSB, NSC* qui peuvent être considérés comme des pans surbaissés de voûte en arc de cloître.

Si le berceau compris entre les deux plans parallèles *BHC, MSN* est droit, c'est-à-dire, si le plan *MBCN* de sa base est un rectangle, la surface convexe de ce berceau sera égale à $BHC \times MB$. Mais en considérant la face *BHC* de ce berceau comme une anse de panier, on trouvera *(Géom. n.° 627)* que la longueur de cette anse *BHC* est égale à $\frac{12\,BL + 10\,LH}{7}$, ou à $\frac{12\,RM + 10\,SR}{7}$; ainsi la surface de ce berceau sera égale à $\frac{12\,BL + 10\,LH}{7} \times MB$, ou à $\frac{12\,RM + 10\,SR}{7} \times MB$.

Mais *MSB* pouvant être pris pour un pan ou pour une partie de pan de voûte en arc de cloître, surbaissé en anse de panier, sa surface sera *(n.° 197)* égale à $(RM \times 0,6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} + SR \times 1,493) \times \frac{1}{2}\,MB$; & la surface de l'autre pan *NSC* étant égale à la même quantité, les deux pans *MSB, NSC,* qu'il faudra retrancher du berceau pour avoir la surface de la lunette *SBHCS,* seront ensemble égaux à $(RM \times 0,6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} + SR \times 1,493) \times MB$.

Ainsi retranchant cette quantité de la surface du berceau qu'on a trouvée égale à $\frac{12\,RM + 10\,SR}{7} \times MB$ ou à $(RM \times 1,7142 + SR \times RM \times 1,429) \times MB$, le reste $(RM \times 1,030 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} - SR \times 0,064) \times MB$

ſera la valeur de la lunette ſurbaiſſée $SBHCS$,

Si le berceau ſurbaiſſé avoit pour baſe un parallélogramme obliquangle $MBCN$, il faudroit le couper perpendiculairement à ſa longueur MB par un plan SRO qui rencontreroit ſa ſurface convexe en SO, & qui couperoit la baſe ſuivant une droite RO perpendiculaire à MB. Conſidérant enſuite SO comme la moitié d'une anſe de panier, on auroit la longueur de l'anſe développée égale à $\frac{12\,RO + 10\,SR}{7}$, ou à $RO \times 1,7142 + SR \times 1,429$; & la ſurface convexe du berceau oblique ſeroit égale au produit $(RO \times 1,7142 + SR \times 1,429) \times MB$.

On trouveroit auſſi que les deux pans MSB, NSC qu'il faut retrancher ſont enſemble égaux à $(RO \times 0,6845 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RO} + SR \times 1,493) \times MB$.

Otant cette valeur des deux pans MSB, NSC de $(RO \times 1,7142 + SR \times 1,429) \times MB$, le reſte $(RO \times 1,03 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RO} - SR \times 0,064) \times MB$ ſera la valeur de la lunette $SBHCS$ oblique & ſurbaiſſée.

EXEMPLE.

Suppoſons une lunette SBHCS *droite & ſurbaiſſée en anſe de panier, dans laquelle* RM *ou* BL = 10 pieds, SR *ou* HL = 7 pieds, *&* MB *ou* SH = 10 pieds. Fig. 145.

On aura $\begin{cases} RM \times 1,030 = & 10,3 \text{ pieds} \\ \overline{SR}^2 \times 0,178 = 8,722 \text{ pieds} & \& \ \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} = 0,872 \\ -SR \times 0,064 = & -0,448 \end{cases}$

Et $RM \times 1,030 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} - SR \times 0,064 = 10,724$ pieds;

Ainſi $(RM \times 1,030 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,178}{RM} - SR \times 0,064) \times MB = 107,24$ pieds qu.

c'eſt-à-dire que la ſuperficie de la lunette propoſée $SBHCS$ vaut environ $107\frac{1}{4}$ pieds quarrés.

REMARQUE.

Fig. 145. **207.** La méthode pour trouver les deux pans MSB, NSC qu'il faut retrancher du berceau pour avoir la lunette $SBHCS$, étant trop difficile à mettre en pratique lorſque l'on conſidère ces pans comme cintrés en anſe de panier, on ſe ſervira pour toiſer ces deux pans de la méthode ſimple qu'on a donnée au n.° 202; ce qui n'empêchera pas de conſidérer le berceau comme s'il étoit ſurbaiſſé en anſe de panier.

Ajoûtant à la montée SR de la lunette les deux cinquièmes de la différence qu'il y aura entre cette montée & le demi-diamètre RM, la ſomme ſera $SR+\frac{2}{5}(RM-SR)$ ou $SR+\frac{2}{5}RM-\frac{2}{5}SR$ ou $\frac{2}{5}RM+\frac{3}{5}SR$; & multipliant cette ſomme par MB, le produit $(\frac{2}{5}RM+\frac{3}{5}SR)\times MB$ ſera (*n.° 202*) la ſurface du pan ASB: & l'autre pan NSC étant de même valeur, le produit $(\frac{4}{5}RM+\frac{6}{5}SR)\times MB$ ſera égal à la ſomme des deux pans MSB, NSC qu'il faudra retrancher de la ſurface du berceau pour avoir celle de la lunette ſurbaiſſée $SBHCS$.

Mais la ſurface du berceau ſurbaiſſé eſt égale à $\frac{11\,2\,RM+10\,SR}{7}\times MB$. Donc en retranchant de cette quantité ce que nous venons de trouver pour la ſomme des deux pans MSB, NSC, le reſte $\frac{3\,2\,RM+8\,SR}{35}\times MB$ ſera la valeur de la ſurface de la lunette ſurbaiſſée $SBHCS$.

C'eſt-à-dire qu'on aura la ſurface d'une lunette droite ſurbaiſſée, en prenant 32 fois ſon demi-diamètre

ou 16 fois ſon diamètre avec 8 fois ſa montée, & en multipliant cette ſomme par la longueur de la lunette, puis diviſant le produit par 35.

Suppoſons, par exemple, qu'une lunette droite ſurbaiſſée SBHCS *ait un diamètre* BC *de* $28\frac{4}{7}$ *pieds ou un demi-diamètre* RM *de* $14\frac{2}{7}$ *pieds, une montée* SR *ou* HL *de* 10 *pieds, & une longueur* MB *ou* SH *de* 7 *pieds.*

On ajoûtera 32 *RM* ou 16 *BC* = ...	$457\frac{1}{7}$ pieds
Avec 8 *SR* = ...	80
Puis on multipliera la ſomme	$537\frac{1}{7}$
Par la longueur *MB*, c'eſt-à-dire, par	7
Et diviſant par 35 le produit	3760 pieds quarrés

le quotient $107\frac{3}{7}$ pieds quarrés ſera la valeur de la lunette propoſée *SBHCS.*

Pour une lunette ſurmontée de Voûte d'arrête.

208. Une lunette ſurmontée *SBHCS* eſt une portion de berceau ſurmonté dont on a retranché deux pans *MSB*, *NSC* qui peuvent être toiſés comme des pans ſurmontés de voûte en arc de cloître. Fig. 146.

Lorſque le berceau ſurmonté compris entre les deux plans parallèles *BHC*, *MSN* eſt droit, ſa ſurface convexe eſt égale au produit *BHC* × *MB*. Mais en conſidérant la courbure *BHC* de ce berceau comme une anſe de panier, on trouvera ſa longueur

$$BHC = \frac{10\,BL + 12\,HL}{7} \text{ ou } \frac{10\,RM + 12\,SR}{7}.$$

Ainſi la ſurface convexe du berceau droit ſurmonté compris entre les deux plans parallèles *BHC*, *MSN*, eſt égale à $\frac{10\,RM + 12\,SR}{7} \times MB$, ou à

$$(RM \times 1,429 + SR \times 1,714) \times MB.$$

On trouvera *(n.° 198)* la ſurface du pan *MSB* égale à $(RM \times 0,347 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} + SR \times 1,784) \times \frac{1}{2} MB$; & comme l'autre pan *NSC* eſt égal à la même quantité, on aura la ſomme des deux pans *MSB, NSC* égale à $(RM \times 0,347 - \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} + SR \times 1,784) \times MB$.

Ainſi retranchant cette valeur des deux pans *MSB, NSC* de celle qu'on a trouvée pour le berceau, le reſte $(RM \times 1,082 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} - SR \times 0,07) \times MB$ ſera la valeur de la ſurface de la lunette droite *SBHCS* ſurmontée en anſe de panier.

Si la lunette *SBHCS* étoit oblique, on couperoit ſon berceau perpendiculairement à ſa longueur *MB* par un plan *SRO*, qui rencontreroit ſa baſe dans une ligne droite *RO* perpendiculaire à *MB;* ou bien l'on ſe contenteroit de tirer du milieu du diamètre du berceau une perpendiculaire *RO* ſur la longueur ou la naiſſance *MB* de ce berceau; & l'on trouveroit que la ſurface de la lunette *SBHCS* oblique & ſurmontée en anſe de panier ſeroit égale à $(RO \times 1,082 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RO} - SR \times 0,07) \times MB$.

EXEMPLE.

Fig. 146. *Suppoſons qu'on veut toiſer une lunette* SBHCS *droite & ſurmontée en anſe de panier, dont le demi-diamètre* BL *ou* RM = 7 pieds, *la montée* HL *ou* SR = 10 pieds, *la longueur* SH *ou* MB = $14\frac{2}{7}$ pieds.

On aura
$RM \times 1,082$ ou $7^{\text{pieds}} \times 1,082 = 7,574^{\text{pieds}}$
$\frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM}$ ou $\frac{100^{\text{pieds}} \times 0,131}{7} = 1,871$
$-SR \times 0,07$ ou $10^{\text{pieds}} \times 0,07 = -0,7$

Et $RM \times 1,082 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} - SR \times 0,07 = 8,745^{\text{pieds}}$

Ainſi $(RM \times 1,082 + \frac{\overline{SR}^2 \times 0,131}{RM} - SR \times 0,07) \times MB$ ou $8,745^{\text{pieds}} \times 14\frac{3}{7}^{\text{pieds}} = 124,928^{\text{pieds quarrés}}$; c'eſt-à-dire que la ſurface de la lunette propoſée $SBHCS$ eſt de $125^{\text{pieds quarrés}}$ à peu de choſe près.

REMARQUE.

209. La méthode pour toiſer une lunette ſurmontée $SBHCS$ devenant trop compoſée lorſque l'on conſidère la ligne de courbure des pans MSB, NSC comme une anſe de panier, on pourra, dans la pratique des toiſés, lui ſubſtituer une méthode plus ſimple qu'il eſt aiſé de déduire de celle qu'on a donnée *(n.° 203)* pour toiſer un pan ſurmonté de voûte en arc de cloître. Fig. 146.

Car ſi l'on retranche de la montée SR les deux ſeptièmes de la différence qu'il y aura entre cette montée & la perpendiculaire RM tirée du pied de cette montée ou du milieu du diamètre ſur MB, & qu'on multiplie le reſte par MB, le produit $[SR - \frac{2}{7}(SR - RM)] \times MB$, ou $(SR - \frac{2}{7}SR + \frac{2}{7}RM) \times MB$, ou $(\frac{5}{7}SR + \frac{2}{7}RM) \times MB$ ſera égal à la ſurface du pan MSB: & comme les deux pans MSB, NSC ſont égaux, la ſomme des ſurfaces de ces deux pans ſera égale à $(\frac{10}{7}SR + \frac{4}{7}RM) \times MB$.

Donc ſi cette valeur de la ſomme des deux pans ſurmontés MSB, NSC eſt retranchée de la valeur de la ſurface du berceau ſurmonté que nous avons trouvé égale à $\frac{12SR + 10RM}{7} \times MB$, le reſte $\frac{(2SR + 6RM) \times MB}{7}$ ſera la valeur de la lunette ſurmontée $SBHCS$.

Ainſi pour avoir la ſurface d'une lunette ſurmontée de voûte d'arrête, on ajoûtera deux fois la montée avec ſix fois le demi-diamètre, ou trois fois le diamètre entier; & ayant multiplié le total par la longueur de la lunette, on prendra la ſeptième partie du produit.

Suppoſons, par exemple, qu'une lunette ſurmontée SBHCS *ait un diamètre* BC *de 14 pieds, ou un demi-diamètre* RM *de 7 pieds, une montée* SR *de 10 pieds, & une longueur* MB *de* $14\frac{2}{7}$ *pieds.*

On ajoûtera 2 *SR* = ...	20	pieds
Avec 6 *RM* = ...	42	
Puis on multipliera la ſomme	62	pieds
Par la longueur *MB*, c'eſt-à-dire, par	$14\frac{2}{7}$	pieds
Et du produit	$885\frac{1}{7}$	pieds quarrés
Prenant la ſeptième partie, on aura	$126\frac{3}{49}$	pieds qu.

ou environ $126\frac{1}{2}$ pieds quarrés pour la ſurface de la lunette ſurmontée *SBHCS.*

DE LA SOLIDITÉ DES VOUSTES.

Juſqu'ici nous n'avons conſidéré que les ſurfaces concaves des voûtes en berceau, des dômes, des voûtes en arc de cloître & des voûtes d'arrête, ſoit qu'elles ſoient en plein cintre, ou ſurbaiſſées ou ſurmontées; ainſi il nous reſte à parler des ſolidités des mêmes voûtes; & comme nous ne pouvons pas nous y arrêter autant que le ſujet paroît le demander, nous nous contenterons d'indiquer les principales méthodes ſuivant leſquelles on peut les toiſer.

De la ſolidité des Voûtes en berceau.

Fig. 147, 148 & 149. **210.** Lorſqu'un berceau en plein cintre, ou ſurbaiſſé ou ſurmonté, a deux têtes oppoſées parallèles

& perpendiculaires à ſa longueur, on trouve ſa ſolidité en multipliant la ſuperficie de l'une de ſes têtes par ſa longueur.

Si la tête de ce berceau eſt compriſe entre un intrados *AEB* & un extrados *MON* parallèles & terminés par une même droite *MN*, on aura la ſuperficie de cette tête, en multipliant la moitié de la ſomme de l'intrados *AEB* & de l'extrados *MON* par l'épaiſſeur *OE* ou *MA* de la voûte. Or comme on pourra toûjours prendre ces intrados & extrados parallèles pour des demi-circonférences de cercles ou pour des anſes de panier, & qu'on a donné dans les Elémens de Géométrie des méthodes pour toiſer les longueurs de ces eſpèces de courbes, on pourra toûjours trouver la ſuperficie d'une tête de berceau en plein cintre ou ſurbaiſſé ou ſurmonté, compriſe entre un intrados *AEB* & un extrados *MON* parallèles & terminés par une même droite *MN*.

Si le berceau eſt ſurbaiſſé ou ſurmonté, & que l'intrados *AEB* & l'extrados *MON* ſoient deux demi-ellipſes, on trouvera la ſuperficie de ſa tête entière en retranchant la ſurface de la demi-ellipſe intérieure *AEB* de la ſurface de l'autre demi-ellipſe *MON*; & l'on multipliera la ſurface de cette tête par la longueur du berceau, pour avoir la ſolidité de ce berceau. Fig. 148 & 149.

Si le berceau eſt compris entre deux murs *DM*, *CN*, en ſorte que l'extrados *FOG* ne deſcende pas juſqu'à la droite *MN* qui termine l'intrados, & ſi l'on ne demande que le ſolide compris entre l'intrados *AEB*, l'extrados *FOG* & les faces intérieures *DA*, *CB* des deux murs; on ne multipliera que la portion de tête *AFOGBEA* par la longueur du berceau;

c'eſt-à-dire qu'après avoir trouvé la demi-couronne compriſe entre l'intrados *AEB* & l'extrados entier *MON*, on en retranchera les deux demi-ſegmens *AMF, BNG*, & l'on multipliera le reſte par la longueur du berceau. Comme les demi-ſegmens *AMF, BNG* ſeront des demi-ſegmens de cercles ou d'ellipſes, on trouvera dans les Elémens de Géométrie des méthodes pour les toiſer.

De la ſolidité des Dômes & des Voûtes en arc de cloître.

Fig. 147, 148 & 149.

211. Si l'on imagine que deux quarts de cercles ou deux quarts d'ellipſes concentriques *AKE, MKO* terminés par les côtés d'un même angle *MKZ*, tournent autour d'un côté *KZ* de cet angle, ils engendreront deux demi-ſphères ou deux demi-ſphéroïdes elliptiques concentriques dont les profils ſeront repréſentés par les deux demi-cercles ou demi-ellipſes concentriques *AEB, MON;* & le quart de couronne *AEOM* engendrera le ſolide d'un dôme en plein cintre ou ſurbaiſſé ou ſurmonté, dont la demi-couronne circulaire ou elliptique *AEBNOM* ſera le profil.

On peut donc regarder le ſolide d'un dôme en plein cintre ou ſurbaiſſé ou ſurmonté comme la différence de deux demi-ſphères ou de deux demi-ſphéroïdes elliptiques aplatis ou alongés; & par conſéquent le toiſé de tous les dômes ſe réduit au toiſé des demi-ſphères & des demi-ſphéroïdes elliptiques aplatis ou alongés. Comme on a dans les Elémens de Géométrie une méthode pour toiſer les ſolidités des demi-ſphères, il ne reſte à parler que de celles des demi-ſphéroïdes elliptiques aplatis ou alongés.

Imaginons une demi-ſphère qui ait même diamètre AB que la baſe du demi-ſphéroïde aplati ou alongé engendré par le quart d'ellipſe AKE: cette demi-ſphère, dont le profil ſera repréſenté par le demi-cercle AHB, & le demi-ſphéroïde produit par la révolution du quart d'ellipſe AKE, auront un équateur commun dont AB ſera le diamètre. Et comme on a démontré *(n.° 130)* que Fig. 148 & 149.

Le diamètre, ou le rayon AK *de l'équateur commun à la ſphère & au ſphéroïde elliptique,*

Eſt à l'axe, ou au demi-axe KE *du ſphéroïde elliptique;*

Comme le ſolide de la demi-ſphère dont AHB *eſt le profil,*

Eſt au ſolide du demi-ſphéroïde elliptique aplati ou alongé dont AEB *eſt le profil:*

On aura le ſolide du demi-ſphéroïde elliptique alongé ou aplati dont AEB eſt le profil, en multipliant par $\frac{KE}{AK}$ le ſolide de la ſphère dont AHB eſt le profil.

Mais en repréſentant par *cer* AK la ſurface du cercle qui a AK pour rayon, on trouvera *(Géom. n.° 486)* le ſolide de la ſphère dont AHB eſt le profil égal à *cer* $AK \times \frac{2}{3} KH$ ou *cer* $AK \times \frac{2}{3} AK$. Ainſi le ſolide du dôme ou demi-ſphéroïde aplati ou alongé dont AEB eſt le profil, ſera exprimé par *cer* $AK \times \frac{2}{3} AK \times \frac{KE}{AK}$ ou par *cer* $AK \times \frac{2}{3} KE$; c'eſt-à-dire que le ſolide d'un demi-ſphéroïde elliptique aplati ou alongé eſt, de même que celui de la ſphère, égal aux deux tiers du produit de ſa baſe & de ſa hauteur, ou égal aux deux tiers du cylindre qui

lui eſt circonſcrit. On eſt donc en état de toiſer les ſolides de tous les demi-ſphéroïdes elliptiques, & de trouver le ſolide d'un dôme qui n'eſt que la différence de deux demi-ſphéroïdes.

Fig. 150, 151 & 152.

212. Nous avons dit *(n.° 181)* qu'une voûte en arc de cloître eſt une eſpèce de dôme à pans conſtruit ſur un plan régulier ou non régulier. Ainſi de même que le ſolide d'un dôme peut être conſidéré comme la différence de deux demi-ſphères ou de deux demi-ſphéroïdes elliptiques, le ſolide d'une voûte en arc de cloître en plein cintre ou ſurbaiſſée ou ſurmontée peut être regardé comme la différence de deux ſolides terminés par deux ſurfaces de voûte en arc de cloître; & par conſéquent le toiſé de ces voûtes ſe réduit à celui des ſolides qui ſont terminés par des ſurfaces de voûtes en arc de cloître en plein cintre ou ſurbaiſſées ou ſurmontées. On va démontrer qu'on trouvera ces ſolides de la même façon que ceux des demi-ſphéroïdes, en multipliant leurs baſes par les deux tiers de leurs hauteurs.

Imaginons un onglet $ABRS$ du ſolide d'une voûte en arc de cloître, terminé par un pan ASB de cette voûte & par deux plans SRA, SRB menés par ſon axe SR & par deux arrêtes SA, SB. Si cet onglet eſt coupé par un plan SRM perpendiculaire à la baſe AB du pan ASB, ce plan SRM ſera un quart de cercle ou un quart d'ellipſe, ſuivant que l'onglet dont il eſt queſtion ſera en plein cintre ou ſurbaiſſé ou ſurmonté; & l'on pourra conſidérer que le ſolide de cet onglet eſt compoſé de filets parallèles à AB terminés par les plans SRA, SRB & engendrés par tous les points du quart de cercle

ou du quart d'ellipſe SRM mûs perpendiculairement à ce plan. Ainſi le ſolide de l'onglet $ABRS$ ſera égal au produit de la ſurface du plan SRM multipliée par le chemin que décrira le centre de gravité du ſyſtème de tous les points de ce plan.

Par le centre de gravité P du plan SRM, imaginons une droite IK parallèle à AB & terminée par les plans SRA, SRB: cette droite IK ſera le chemin du centre de gravité de tous les points du plan SRM; puiſque les mouvemens de tous les points de ce plan ſont terminés par les deux plans SRA, SRB. Ainſi le ſolide de l'onglet $ABRS$ ſera repréſenté par $SRM \times IK$.

Imaginons un plan IQK mené par IK parallèlement à la baſe ARB de l'onglet: les lignes PQ, IQ, KQ, où ce plan ſera coupé par les plans SRM, SRA, SRB, ſeront parallèles aux droites MR, AR, BR, où la baſe de l'onglet ſera rencontrée par les mêmes plans : & comme on a fait la droite IK parallèle à AB, les triangles MRB, ARB ſeront ſemblables aux triangles PQK, IQK, & donneront $MR : PQ :: BR : KQ :: AB : IK$; d'où l'on tirera $IK = PQ \times \frac{AB}{MR}$.

Si le plan SRM eſt un quart de cercle, on trouvera *(n.° 85)* $PQ = \frac{\overline{SM}^2}{3SNM}$. Mais alors on aura $SR = MR$, & $\overline{SM}^2$ ou $\overline{SR}^2 + \overline{MR}^2 = 2\overline{MR}^2$, & par conſéquent $PQ = \frac{2\overline{MR}^2}{3SNM}$; d'où l'on tirera IK ou $PQ \times \frac{AB}{MR} = \frac{2MR \times AB}{3SNM}$. Fig. 150.

On aura auſſi $SRM = \frac{1}{2} SNM \times SR$; ainſi $SRM \times IK = \frac{1}{2} SNM \times SR \times \frac{2\,MR \times AB}{3\,SNM}$ $= \frac{1}{3} SR \times MR \times AB$ ou $\frac{MR \times AB}{2} \times \frac{2}{3} SR$; c'eſt-à-dire que le ſolide de l'onglet $ABRS$ eſt égal au produit de ſa baſe $ARB = \frac{MR \times AB}{2}$ multipliée par les deux tiers de ſa hauteur SR.

Fig. 151 & 152. Si le plan SRM eſt un quart d'ellipſe, & que du point R comme centre on décrive le quart de circonférence MO dont T ſoit le centre de gravité: ce centre de gravité T & celui P de l'ellipſe ſeront dans une même droite PT parallèle à SR, ou perpendiculaire à MR *(n.° 118)*. On aura donc *(n.° 85)* TV ou $PQ = \frac{\overline{MO}^2}{3\,MNO}$: & comme $\overline{MO}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{OR}^2$ ou $2\overline{MR}^2$, on aura $PQ = \frac{2\overline{MR}^2}{3\,MNO}$, & par conſéquent IK ou $PQ \times \frac{AB}{MR} = \frac{2\,MR \times AB}{3\,MNO}$.

On aura auſſi *(n.° 111)* MR ou $OR : SR :: ORM : SRM$, & par conſéquent $SRM = \frac{ORM \times SR}{MR}$.

Et comme $ORM = MNO \times \frac{MR}{2}$, on aura $SRM = MNO \times \frac{SR}{2}$.

On aura donc $SRM \times IK$ ou $MNO \times \frac{SR}{2} \times \frac{2\,MR \times AB}{3\,MNO}$ $= \frac{2}{3} MR \times \frac{AB}{2} \times SR$ ou $\frac{2}{3} ARB \times SR$; c'eſt-à-dire que le ſolide de l'onglet $ABRS$ ſurbaiſſé ou ſurmonté

eſt égal au produit de la multiplication des deux tiers de ſa baſe *ARB* par ſa hauteur *SR*.

Puiſqu'il eſt démontré que chaque onglet du ſolide terminé par la ſurface d'une voûte en arc de cloître en plein cintre ou ſurbaiſſée ou ſurmontée, eſt égal au produit de la multiplication des deux tiers de ſa baſe par ſa hauteur; il eſt clair que le ſolide entier erminé par la ſurface d'une voûte en arc de cloître, ou la ſomme des onglets qui compoſent ce ſolide, eſt égale au produit de la multiplication des deux tiers de la baſe de cette voûte par ſa hauteur.

De la ſolidité des Voûtes d'arrête.

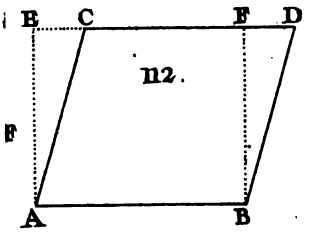
213. Une voûte d'arrête étant compoſée d'autant de lunettes que le plan de ſa baſe a de côtés, & le ſolide de chaque lunette compris entre deux plans *ERB, ERC* menés par ſes arrêtes *SB, SC* perpendiculairement à ſa baſe, pouvant être toiſé ſéparément; on ſaura toiſer le ſolide d'une voûte d'arrête lorſqu'on aura une méthode pour toiſer le ſolide d'une lunette compriſe entre les plans de ſes arrêtes : & comme le ſolide d'une lunette de voûte d'arrête eſt diviſé en deux parties égales par un plan *ENLR* mené par ſon axe *SR* & par le centre *L* de ſa face, il ſuffira d'avoir une méthode pour toiſer le ſolide d'une demi-lunette, compriſe entre les deux plans *ENLR, ERB*. Fig. 153, 154 & 155.

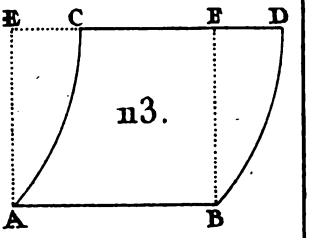
Imaginons le ſolide de la moitié de cette lunette compoſé d'une infinité de filets parallèles à ſa longueur *RL* que nous ſuppoſerons perpendiculaire à ſa face *NMB*, terminés par le plan *ERB* & par la face de la demi-tête *BHNM* de la lunette,

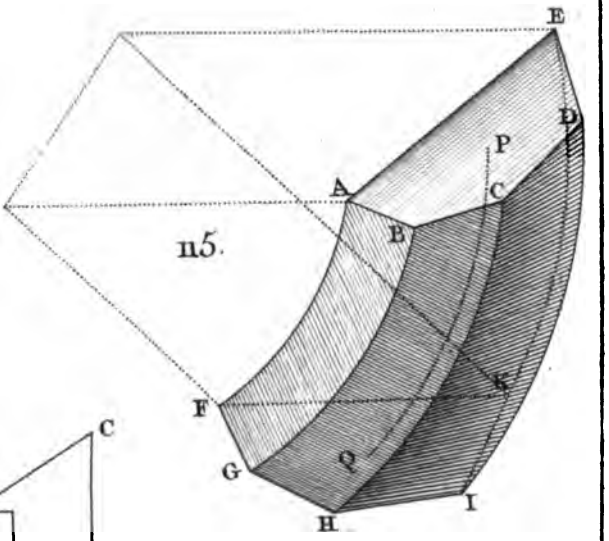
& engendrés par tous les points de cette demi-face: le centre de gravité P du ſyſtème de tous ces points décrira une ligne parallèle à LR & compriſe entre les deux plans SRB, NMB: & comme *(n.° 171)* le ſolide de la demi-lunette eſt égal au produit de la demi-face $BHNM$ multipliée par le chemin que décrit ſon centre de gravité P, le Problème pour trouver le ſolide de cette demi-lunette ſe réduit à trouver la ſuperficie de la demi-face $BHNM$ & le chemin que décrit ſon centre de gravité P.

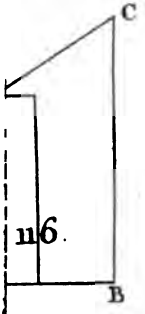
Comme nous avons donné des méthodes pour trouver les ſurfaces de toutes les figures rectilignes & de toutes les portions de cercles & d'ellipſes, & pour trouver les centres de gravité de ces ſurfaces, on déterminera avec telle préciſion qu'on voudra l'aire de la demi-face $BHNM$ & la poſition de ſon centre de gravité P relativement à NL. Ainſi imaginant une perpendiculaire PQ au diamètre BC, on trouvera BQ; & ſuppoſant QT parallèle à LR, on fera cette proportion $BL : LR :: BQ : QT$, dont les trois premiers termes ſeront connus, & dont on tirera la valeur de la ligne QT qui eſt égale au chemin décrit par le centre de gravité P pendant la génération du ſolide de la demi-lunette.

ELEMENS

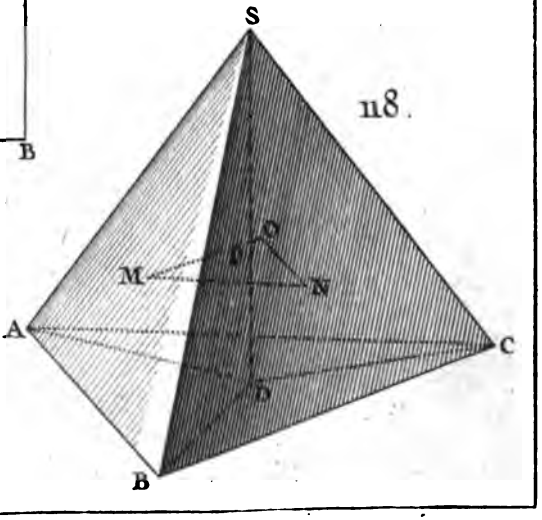

E
C
F
D
F
n2.
A
B

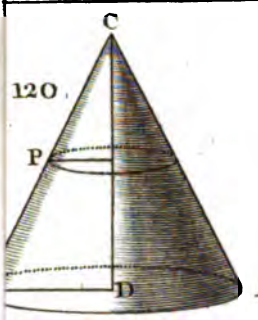

E
C
F
D
n3.
A
B

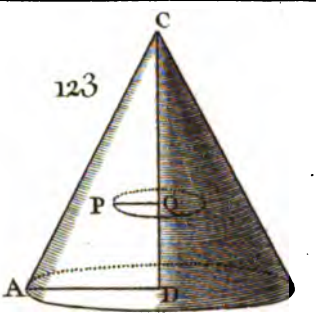

E
D
P
A
C
B
n5.
K
F
G
Q
H
I

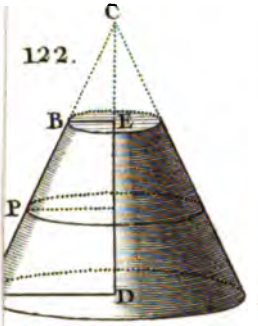

C
n6.
B

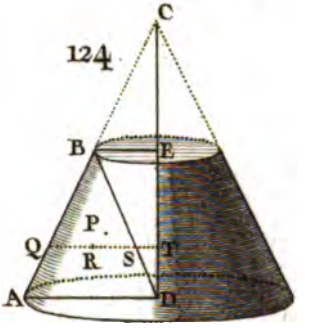
C
B

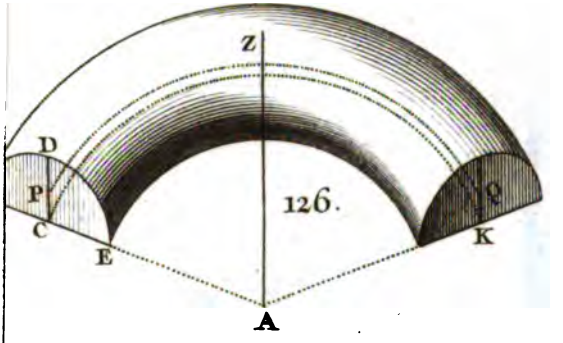

S
n8.
O
M
N
A
C
B

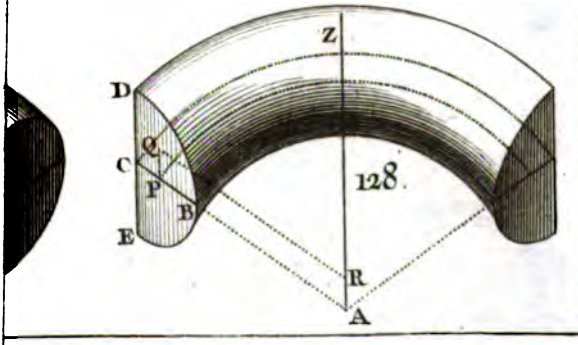

120.
C
P
D


123.
C
P
Q
A
D

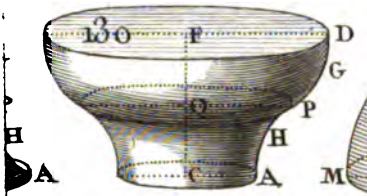

122.
C
B
E
P
D


124.
C
B
E
P.
Q
T
R
S
A
D

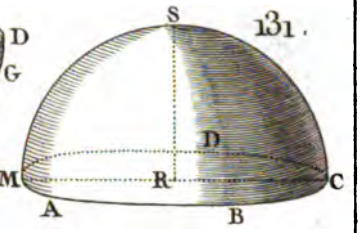

Z
D
P
C
E
126.
Q
K
A


Z
D
C
Q
P
B
E
128.
R
A

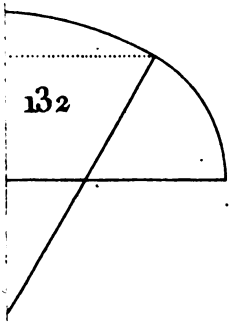
130

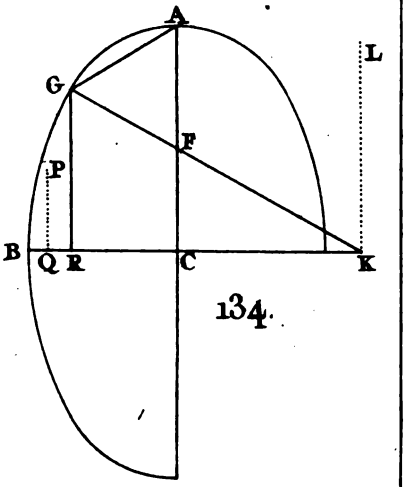


131.



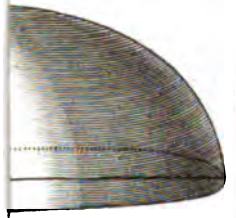
132



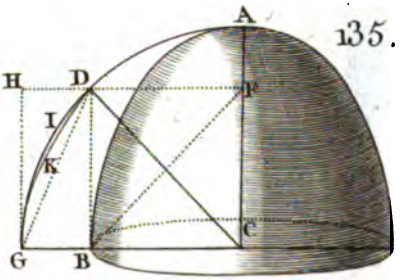


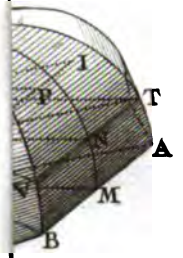
134.

133.

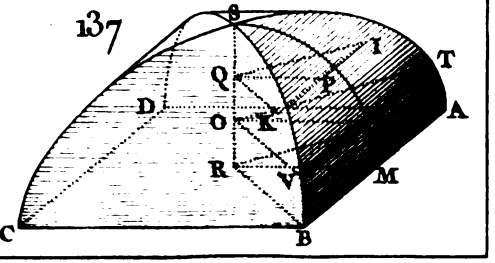


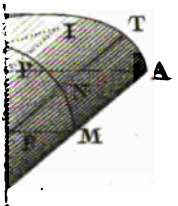
135.



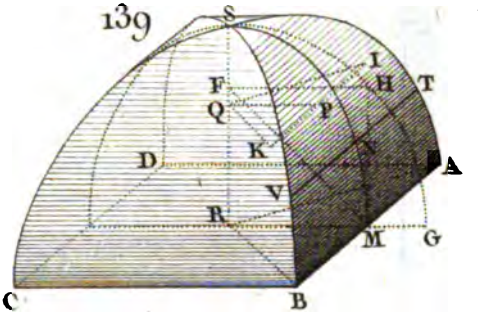


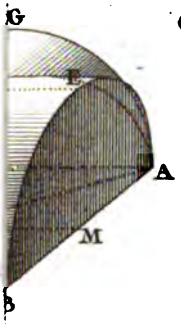
137



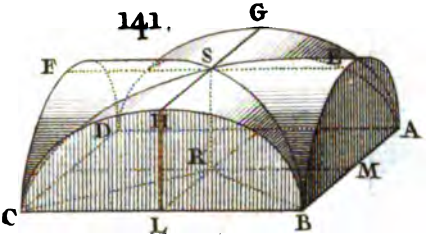


139

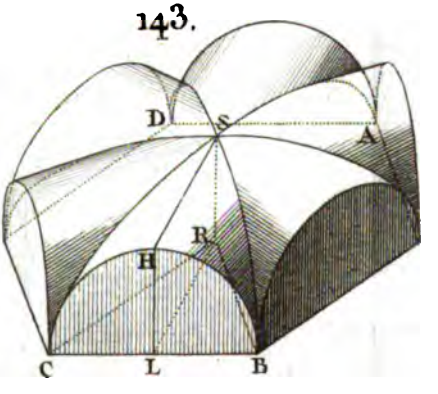




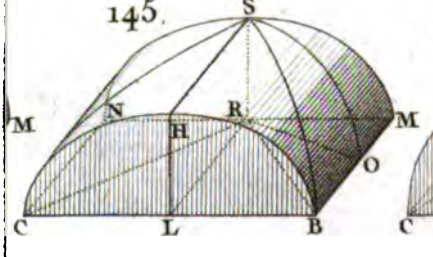
141.



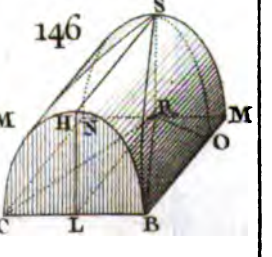
143.

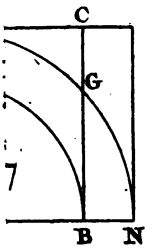


145.

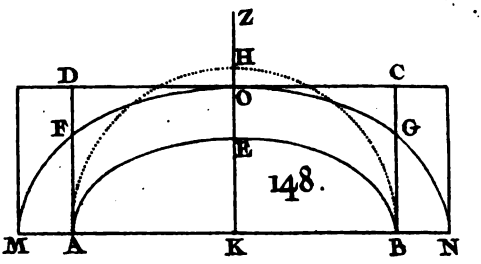


146

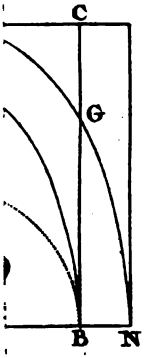




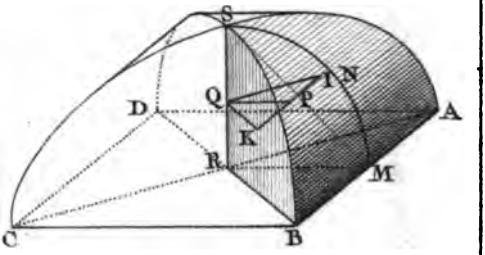
7



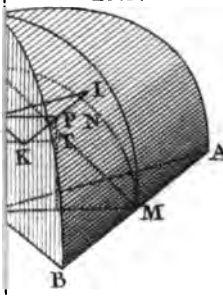
148.



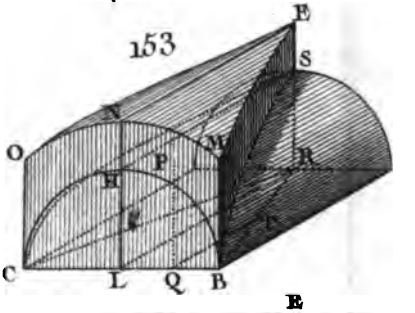
150.

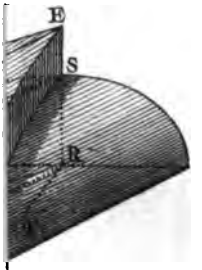


152.

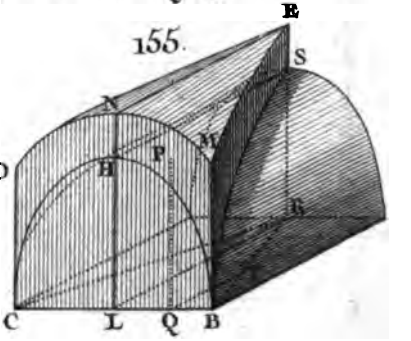


153





155.



ELEMENS
DE
MECHANIQUE STATIQUE.

LIVRE SECOND.

De la compoſition & décompoſition des Forces.

214. LES règles qu'on va établir dans ce ſecond Livre, au ſujet de la compoſition & décompoſition des forces, renferment preſque toute la théorie de la Méchanique ſtatique; en ſorte que les Traités particuliers des ſept machines, dont on parlera dans les ſept Livres ſuivans, ne contiendront que des applications de ces règles à ces machines. Ainſi l'on ne doit point être ſurpris ſi les Théorèmes qu'on va démontrer & les Problèmes qu'on va réſoudre pour la compoſition & décompoſition des forces, paroiſſent en quelque manière répétés dans l'application qu'on en fera à chaque machine.

Ce Livre pourroit donc être regardé comme le premier de la Méchanique ſtatique, & les notions préliminaires que l'on a données au commencement de ce Traité, conviennent plus particulièrement à ce Livre-ci & aux ſuivans qu'à celui des centres de gravité, qui n'eſt en quelque ſorte qu'une ſuite de la théorie des leviers, & qui n'a été mis le premier que parce qu'il demande peu de principes, & qu'il

auroit rempli le Traité du levier d'un trop grand nombre de propoſitions étrangères à cette machine.

On a dit dans les notions préliminaires, qu'un point ſollicité à ſe mouvoir par tant de puiſſances qu'on voudra, qui lui ſeront appliquées toutes à la fois ſuivant des directions quelconques, ne peut aller que par un ſeul chemin, comme s'il n'étoit tiré ou pouſſé que par une ſeule force équivalente à toutes les puiſſances qui concourent à le mouvoir. Cet axiome eſt évident lorſqu'il ne s'agit que d'un point mobile qui n'a point de parties; mais il n'aura pas toûjours lieu lorſqu'il s'agira d'un corps auquel on appliquera différentes puiſſances qui ſeront toutes dans différens plans : ces puiſſances pourront donner à différentes parties de ce corps différens mouvemens, en ſorte qu'elles ne pourront pas ſe réduire à une ſeule force capable du même effet.

Pour traiter cette matière avec plus d'ordre, nous la partagerons en deux Chapitres. Dans le premier, nous ne parlerons que de la compoſition & décompoſition des forces qui ſont dans un même plan, ou qui peuvent être toutes réduites à un même plan. Dans le ſecond, nous parlerons de la compoſition des forces qui ſont ſituées dans différens plans & qui ne peuvent pas être réduites à un même plan ; & nous y ferons voir que ces forces, quel qu'en ſoit le nombre, peuvent toûjours être réduites à deux forces ſeulement dirigées dans deux plans différens.

CHAPITRE I.

De la compoſition & décompoſition des Forces dont les directions ſont dans un même plan ou peuvent être réduites à un même plan.

DÉFINITIONS.

215. LA force unique qui peut mouvoir un corps ſuivant la même direction & de la même façon que le mouvroient pluſieurs autres forces appliquées à la fois, s'appelle *Force compoſée* ou *Force réſultante* de toutes celles qui ſont véritablement appliquées; & chacune des forces qui concourent à compoſer la force réſultante peut être nommée *Force compoſante.*

La direction de la force compoſée ou réſultante de pluſieurs autres, s'appelle *Direction moyenne*, ou *Direction compoſée*, ou *Direction réſultante.*

L'art de trouver la grandeur & la direction d'une force réſultante de l'action de pluſieurs autres, ſe nomme *Compoſition* de ces forces; & la manière de trouver les grandeurs & les directions de pluſieurs forces qui toutes enſemble feroient ſur un corps le même effet qu'une force unique donnée, s'appelle *Décompoſition* de cette force.

De même que *(notions prélim.)* les forces ſimples ſont repréſentées par des lignes qui leur ſont proportionnelles, & qui ſont priſes ſur leurs directions; les forces compoſées ſeront auſſi exprimées par des lignes priſes ſur leurs directions, & qui ſeront à chacune des lignes par leſquelles on repréſentera les

forces ſimples compoſantes, comme ces forces compoſées ſont à leurs forces compoſantes ; en ſorte que ſi l'on compare toutes ces lignes par le moyen d'une même échelle dont les parties repréſentent des livres ou des marcs ou des onces &c. l'on connoîtra avec combien de livres ou de marcs ou d'onces &c. les puiſſances compoſantes & leur force réſultante tirent ou pouſſent le corps auquel elles ſont appliquées.

Fig. 156. **216.** On a dit *(ax. 4)* que quand pluſieurs puiſſances appliquées à un même corps ont la même direction, on peut les regarder comme une ſeule force égale à leur ſomme, & de même direction qu'elles. Ainſi lorſque deux puiſſances *P, Q* appliquées au même point *A* d'un corps *K* ſeront repréſentées, tant pour leurs forces que pour leurs directions, par deux parties *AB, AC* d'une même droite ; ſi l'on prolonge *AB* d'une quantité $BD = AC$, en ſorte que l'on ait $AD = AB + AC$, la réſultante des deux puiſſances *P, Q* ſera repréſentée par $AB + AC$ ou par *AD*, tant pour ſa quantité de force que pour ſa direction.

Fig. 157. **217.** Lorſque deux puiſſances appliquées à un même corps ont des directions oppoſées, on a dit *(ax. 5)* qu'il en réſultoit à ce corps une force égale à leur différence. Ainſi lorſque deux puiſſances *P, Q* appliquées au même point *A* d'un corps auront des directions contraires, & ſeront repréſentées par les parties *AB, AC* de leurs directions ; ſi l'on prend ſur l'expreſſion *AB* de la plus grande, une partie $BD = AC$, en ſorte qu'on ait $AD = AB - AC$, la réſultante de ces deux puiſſances ſera repréſentée

par AB — AC ou par AD, tant pour ſa quantité de force que pour ſa direction.

Il n'y a donc aucune difficulté pour la compoſition des forces qui ont leurs directions ſuivant une même ligne droite, c'eſt-à-dire, qui ont la même direction ou des directions contraires; & il eſt évident que la décompoſition d'une puiſſance en pluſieurs forces de même direction que cette puiſſance, n'a pas plus de difficulté, & ne mérite pas qu'on s'y arrête. On paſſe donc à la compoſition des forces qui ont différentes directions, mais qui ſont dirigées dans un même plan.

THEOREME.

218. *Lorſque deux puiſſances* P, Q *dirigées dans un même plan, & dont les directions concourent en quelque point* A, *ſont appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible* MN *droite ou courbe, ſoûtenue en équilibre au moyen d'un appui* F, *la droite* AF *tirée de leur point de concours à l'appui* F *eſt la direction de la force réſultante de ces deux puiſſances.* Fig. 158, 159 & 160.

DÉMONSTRATION.

Puiſque les directions des deux puiſſances P, Q concourent en un point A, on pourra ſuppoſer (*Demande* 1) qu'elles ſont toutes deux appliquées à ce point A commun à leurs directions, & regarder ce point A comme un point de la dépendance de la ligne inflexible MN, c'eſt-à-dire, comme un point lié avec cette ligne de manière qu'il ne puiſſe pas être mû ſans elle. On pourra donc ſuppoſer qu'il n'y a que le point A qui reçoive l'action des deux puiſſances P, Q; ainſi la force réſultante de ces deux

puiſſances doit néceſſairement paſſer par ce point *A*.

Puiſque la ligne inflexible *MN* tirée par les deux puiſſances *P*, *Q* eſt arrêtée par l'appui *F*, & demeure en équilibre; l'obſtacle *F* au mouvement de cette ligne *MN* eſt (*ax. 3*) néceſſairement placé dans la direction de la force réſultante des deux puiſſances *P*, *Q*.

Donc la direction de la force réſultante des deux puiſſances *P*, *Q* paſſe par le point *A* & par le point *F*: & par conſéquent la droite *AF* menée par ces deux points eſt la direction de cette réſultante. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

Fig. 158, 159 & 160. **219.** Comme les deux puiſſances *P*, *Q* ſont ſuppoſées dirigées dans un même plan, la ligne inflexible *MN* à laquelle elles ſont appliquées n'en peut recevoir de mouvement que ſuivant ce plan: ainſi l'appui *F* qui doit ſervir d'obſtacle au mouvement de cette ligne doit néceſſairement être dans le même plan; & par conſéquent la direction *AF* de la réſultante des deux puiſſances *P*, *Q* doit être dans le même plan que les directions de ces deux puiſſances.

THEOREME.

Fig. 158, 159 & 160. **220.** *Lorſque deux puiſſances* P, Q, *appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible* MN *& dirigées dans un même plan, ſont en équilibre ſur un appui* F *qui s'oppoſe au mouvement de cette ligne; ſi du point d'appui* F *on mène des perpendiculaires* FE, FG *aux directions des deux puiſſances* P, Q, *ces perpendiculaires ſeront en raiſon réciproque des forces de ces deux puiſſances; c'eſt-à-dire qu'on aura* P : Q :: FG : FE.

DÉMONSTRATION.

Du point d'appui F comme centre, & d'un rayon égal à la perpendiculaire FG, ayant décrit dans le plan des directions des deux puiſſances P, Q un arc GH terminé par le prolongement de la perpendiculaire FE; ſi l'on imagine une puiſſance K égale à la puiſſance Q, & dont la direction ſoit parallèle à celle de la puiſſance P, c'eſt-à-dire, perpendiculaire à FH, les deux puiſſances égales K, Q, dont les directions ſeront tangentes au même arc GH, ſeront également propres à contrebalancer la puiſſance P ſur l'appui F: & puiſque les deux puiſſances P, Q ſont ſuppoſées en équilibre ſur cet appui, les deux puiſſances P, K ſeront auſſi en équilibre ſur le même appui.

Or les deux puiſſances P, K ayant des directions parallèles, & pouvant être regardées comme des poids, ſeront *(n.° 52)* en raiſon réciproque des parties de la droite EH compriſes entre l'appui F & leurs directions; c'eſt-à-dire qu'on aura $P : K :: FH : FE$.

Donc puiſque les puiſſances Q, K ſont ſuppoſées égales, on aura auſſi $P : Q :: FH : FE$ ou $:: FG : FE$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

221. Et réciproquement lorſque deux puiſſances P, Q appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible MN droite ou courbe, & dirigées dans un même plan, ſont en raiſon réciproque des perpendiculaires FE, FG tirées de l'appui du levier ſur leurs directions, ces puiſſances ſont en équilibre ſur cet appui. Fig. 158, 159 & 160.

Car ſi les deux puiſſances P, Q n'étoient pas en équilibre ſur l'appui F, on pourroit, en augmentant

ou diminuant la puiſſance *P* d'une certaine quantité, la mettre en équilibre ſur cet appui avec la puiſſance *Q;* & pour lors on auroit *(n.° 52)* une puiſſance plus ou moins grande d'une certaine quantité que la puiſſance *P*, à la puiſſance *Q*, comme *FG* eſt à *FE*.

Mais on ſuppoſe que *FG* eſt à *FE*, comme la puiſſance *P* eſt à la puiſſance *Q*. On auroit donc une puiſſance plus ou moins grande d'une certaine quantité que la puiſſance *P*, à la puiſſance *Q*, comme la puiſſance *P* eſt à la puiſſance *Q :* ce qui ſeroit abſurde, à moins que la quantité dont la puiſſance *P* ſeroit augmentée ou diminuée ne fût zéro. Ainſi la puiſſance *P* ne doit être ni augmentée ni diminuée, pour être en équilibre avec la puiſſance *Q*.

THEOREME.

Fig. 158, 159 & 160.

222. *Lorſque deux puiſſances* P, Q *appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible* MN, *& dirigées dans un même plan, ſont en équilibre ſur un appui* F; *ſi l'on mène par cet appui des droites* FC, FB *parallèles aux directions des puiſſances* P, Q, *en ſorte que* ABFC *ſoit un parallélogramme, les deux puiſſances* P, Q *ſeront en même rapport que les côtés* AB, AC *de ce parallélogramme, pris ſur leurs directions.*

DÉMONSTRATION.

Par le point d'appui *F* ſoient tirées des perpendiculaires *FE, FG* ſur les directions des puiſſances *P, Q* qu'on ſuppoſe en équilibre : on a vû dans le dernier Théorème qu'on aura *P* : *Q* :: *FG* : *FE*.

Les deux triangles rectangles *FGC, FEB* ſeront ſemblables; car à cauſe de *FC, FB* parallèles à *AP, AQ*, chacun des deux angles *FCG, FBE* ſera égal

à l'angle EAG : ainſi ces triangles ſemblables donneront $FG : FE :: FC : FB$ ou $:: AB : AC$.

Donc on aura $P : Q :: AB : AC$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

223. Et réciproquement lorſque deux puiſſances P, Q ſont proportionnelles aux côtés AB, AC d'un parallélogramme, pris ſur leurs directions, & que la diagonale AF de ce parallélogramme eſt dirigée vers l'appui F de la ligne inflexible à laquelle ces puiſſances ſont appliquées; ces deux puiſſances ſont en équilibre ſur l'appui F. Fig. 158, 159 & 160.

Car puiſque *(hyp.)* $P : Q :: AB : AC$, & qu'on vient de trouver $AB : AC$ ou $FC : FB :: FG : FE$, on a $P : Q :: FG : FE$. Ainſi *(n.° 221)* les deux puiſſances P, Q ſont en équilibre.

COROLLAIRE II.

224. Si par un point quelconque f de la droite FA, ou du prolongement de cette ligne tirée de l'appui F au point A où concourent les directions des deux puiſſances P, Q, l'on mène deux parallèles fc, fb aux directions de ces puiſſances, on aura un ſecond parallélogramme $Abfc$ ſemblable au premier $ABFC$ dont la diagonale ſe termine à l'appui F; ainſi ces deux parallélogrammes donneront cette proportion $Ab : Ac :: AB : AC$. Mais dans le cas où les deux puiſſances P, Q ſont en équilibre ſur l'appui F, on trouve *(n.° 223)* $AB : AC :: P : Q$. Donc on aura auſſi $Ab : Ac :: P : Q$; c'eſt-à-dire que deux puiſſances P, Q en équilibre ſont proportionnelles aux côtés Ab, Ac d'un parallélogramme, pris ſur leurs directions, & ſont par conſéquent repréſentées par ces Fig. 158, 159 & 160.

côtés, lorſque la diagonale *Af* ou ſon prolongement paſſe par l'appui *F*.

Et réciproquement lorſque deux puiſſances *P*, *Q* ſont proportionnelles aux deux côtés *Ab*, *Ac* d'un parallélogramme, pris ſur leurs directions, & que la diagonale *Af* ou ſon prolongement paſſe par l'appui *F*, les deux puiſſances *P*, *Q* ſont en équilibre ſur cet appui.

THEOREME.

Fig. 158, 159 & 160.

225. *Lorſque deux puiſſances* P, Q *ſont repréſentées par les côtés* Ab, Ac *d'un parallélogramme* Abfc, *leur force réſultante eſt dirigée ſuivant la diagonale* Af *de ce parallélogramme.*

Et réciproquement lorſque la force réſultante de deux puiſſances P, Q *eſt dirigée ſuivant la diagonale* Af *d'un parallélogramme dont les côtés contigus* Ab, Ac *ſont pris ſur les directions de ces puiſſances, ces deux puiſſances* P, Q *ſont proportionnelles aux côtés* Ab, Ac *de ce parallélogramme, & ſont par conſéquent repréſentées par ces côtés.*

DÉMONSTRATION.

PARTIE I. Puiſqu'on ſuppoſe les deux puiſſances *P*, *Q* repréſentées par les côtés contigus *Ab*, *Ac* du parallélogramme *Abfc*, ces côtés *(notions prélim.)* ſont proportionnels à ces puiſſances, & ſont pris ſur leurs directions. Donc ſi l'on imagine les puiſſances *P*, *Q* appliquées à une verge inflexible *MN* ſituée dans le plan où ſont les directions de ces puiſſances, & que ſous cette ligne on place un appui *F* dans la direction de la diagonale *AF*, les puiſſances *P*, *Q* ſeront en équilibre ſur cet appui *(n.° 223)*; ainſi *(n.° 218)* leur réſultante ſera dirigée ſuivant la droite

AF ou FA menée par l'appui & par le point où concourent leurs directions, & ſera par conſéquent dirigée ſuivant la diagonale Af ou fA du parallélogramme $Abfc$ dont les côtés contigus Ab, Ac repréſentent les deux puiſſances P, Q. *C. Q. F. 1.° D.*

PART. II. La réſultante des deux puiſſances P, Q étant ſuppoſée dirigée ſuivant la diagonale Af ou fA du parallélogramme $Abfc$ dont les côtés contigus ſont ſur les directions de ces puiſſances ; ſi l'on imagine ces puiſſances appliquées à une verge inflexible MN ſituée dans le plan de ces puiſſances, & que ſous cette ligne on place un appui F dans la direction de la diagonale Af, les puiſſances P, Q ſeront en équilibre ſur cet appui : ainſi *(n.° 222)* elles ſeront proportionnelles aux côtés contigus Ab, Ac du parallélogramme $Abfc$, & ſeront par conſéquent repréſentées par ces côtés, tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions. *C. Q. F. 2.° D.*

On doit remarquer que dans ce Théorème il s'agit ſeulement de la direction de la force réſultante de deux puiſſances dont les directions ſont dans un même plan & ſe croiſent dans un point A, *& qu'il n'eſt point encore queſtion de comparer la valeur de cette force réſultante avec celles des deux puiſſances* P, Q *qui la compoſent. Mais on va démontrer dans les deux Théorèmes ſuivans que cette force réſultante eſt toujours repréſentée par la diagonale du parallélogramme dont les côtés contigus repréſentent les puiſſances compoſantes.*

THEOREME.

226. *Lorſque deux puiſſances* P, Q *ſont repréſentées, tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions,* Fig. 161.

par les côtés contigus AB, AC *d'un parallélogramme rectangle* ABFC, *la réſultante de ces deux puiſſances eſt repréſentée par la diagonale* AF *du même parallélogramme rectangle.*

DÉMONSTRATION.

On vient de démontrer que la réſultante des deux puiſſances P, Q repréſentées par les côtés contigus AB, AC du parallélogramme $ABFC$ eſt néceſſairement dirigée ſuivant la diagonale AF de ce parallélogramme. Ainſi cette force réſultante doit être repréſentée par une ligne droite priſe ſur cette diagonale.

Ayant imaginé que la réſultante eſt repréſentée par une droite AO de longueur inconnue, plus longue ou plus courte que la diagonale AF ſur laquelle elle eſt priſe, & ayant tiré par le point A commun aux directions des deux puiſſances P, Q une droite IL perpendiculaire à la diagonale AF; ſuppoſons deux nouvelles forces dirigées ſuivant AF, AI, & repréſentées par deux parties AD, AI telles que l'on ait $AO : AB : AC :: AB : AD : AI$. Suppoſons encore deux autres forces dirigées ſuivant les droites AL, AF, & repréſentées par des parties AL, AE de ces lignes, de manière que l'on ait $AO : AB : AC :: AC : AL : AE$. Il eſt clair que

1.° Les deux forces repréſentées par AD, AI ſeront diſpoſées par rapport à la puiſſance P repréſentée par AB, de la même manière que les deux puiſſances P, Q repréſentées par AB, AC ſont diſpoſées par rapport à leur réſultante AO. Car AD fait avec AB le même angle que AB fait avec AO, & l'angle IAB que AI fait avec AB eſt égal à l'angle

CAO que AC fait avec AO : & puiſque les deux puiſſances P, Q repréſentées par AB, AC ont avec leur réſultante repréſentée par AO, les mêmes rapports que les forces repréſentées par AD, AI ont avec la puiſſance P repréſentée par AB, on pourra regarder AD, AI comme deux forces dont la puiſſance P eſt compoſée, de la même façon que la réſultante AO eſt compoſée de deux puiſſances P, Q.

2.° Par les mêmes raiſons, les puiſſances compoſantes P, Q repréſentées par AB, AC ſeront diſpoſées par rapport à leur réſultante AO, comme les deux forces repréſentées par AL, AE ſont diſpoſées par rapport à la puiſſance Q repréſentée par AC : & puiſque la réſultante AO eſt à chacune des deux forces AB, AC qui la compoſent, comme la puiſſance Q exprimée par AC eſt à chacune des deux forces AL, AE, on pourra regarder ces deux forces AL, AE comme deux compoſantes dont la puiſſance Q ou AC eſt la réſultante.

Donc au lieu des deux puiſſances P, Q ou AB, AC dont la réſultante inconnue AO eſt compoſée, on pourra prendre les quatre forces repréſentées par AD, AI, AL, AE qui juſqu'ici ſont inconnues, mais dont on connoît les rapports, puiſque *(conſtr.)* on a $\begin{cases} AO : AB : AC :: AB : AD : AI \\ AO : AB : AC :: AC : AL : AE. \end{cases}$

Mais de ces quatre forces AD, AI, AL, AE, les deux du milieu AI, AL ſe détruiſent ; parce qu'elles ſont priſes en ſens contraires ſur la même droite IL, & qu'elles ſont égales, comme on va le démontrer.

Car $\left.\begin{matrix} AO : AC :: AB : AI \\ AO : AB :: AC : AL \end{matrix}\right\}$ & par conſéquent $\begin{cases} AI = \frac{AB \times AC}{AO} \\ AL = \frac{AB \times AC}{AO}. \end{cases}$

Ainſi les deux forces AI, AL ſont égales, puiſqu'elles ſont exprimées par la même fraction $\frac{AB \times AC}{AO}$.

Il ne reſte donc, pour compoſer la réſultante AO des deux puiſſances P, Q, que les deux forces repréſentées par AD & AE dont on va trouver les valeurs.

Puiſque *(conſtr.)* $AO : AB : AC :: \begin{Bmatrix} AB : AD : AI \\ AC : AL : AE \end{Bmatrix}$,

on aura $\begin{Bmatrix} AO : AB :: AB : AD \\ AO : AC :: AC : AE \end{Bmatrix}$. Ainſi $\begin{Bmatrix} \overline{AB}^2 = AO \times AD \\ \overline{AC}^2 = AO \times AE \end{Bmatrix}$,

& par conſéquent

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = AO \times AD + AO \times AE = AO \times (AD + AE).$$

Mais les deux forces repréſentées par AD, AE agiſſant ſuivant la même direction que la réſultante AO qu'elles doivent compoſer, leur ſomme $AD + AE$ ſera néceſſairement égale à AO *(ax. 4)*. Ainſi l'on pourra mettre AO pour $AD + AE$ dans la dernière égalité; ce qui donnera $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = AO \times AO = \overline{AO}^2$.

Or AB, AC faiſant enſemble un angle droit, ſi l'on tire la diagonale BC, on aura $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; & par conſéquent $\overline{AO}^2 = \overline{BC}^2$ ou $AO = BC$: & comme les deux diagonales BC, AF du parallélogramme rectangle $ABFC$ ſont égales, on aura $AO = AF$; c'eſt-à-dire que l'inconnue AO par laquelle on a repréſenté la réſultante des deux puiſſances P, Q, tant pour ſa grandeur que pour ſa direction, eſt égale à la diagonale AF du parallélogramme rectangle dont les côtés contigus AB, AC repréſentent les puiſſances compoſantes P, Q. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

227. Lorſqu'une puiſſance quelconque R ſera repréſentée par une partie AF de ſa direction, l'on pourra donc prendre à ſa place deux autres puiſſances P, Q repréſentées tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions par les côtés contigus AB, AC d'un parallélogramme rectangle dont AF ſera la diagonale. Fig. 161.

Car les deux puiſſances P, Q qui ſeront repréſentées par AB, AC compoſeront une réſultante AF qui ne différera en rien de la puiſſance R pour laquelle on les a priſes.

THEOREME.

228. *Lorſque deux puiſſances* P, Q *ſont repréſentées par les côtés contigus* AB, AC *d'un parallélogramme quelconque* ABFC *rectangle ou non rectangle, la réſultante de ces deux puiſſances eſt toûjours repréſentée, tant pour ſa direction que pour ſa grandeur, par la diagonale* AF *du même parallélogramme.* Fig. 162 & 163.

DÉMONSTRATION.

Par le point A, d'où partent les directions des deux puiſſances P, Q, ſoit menée la droite IL perpendiculaire à la diagonale AF; & par les points B, C où ſe terminent les côtés contigus du parallélogramme, ſoient tirées les droites BI, CL parallèlement à cette diagonale, & les droites BD, CE perpendiculairement à la même diagonale prolongée s'il eſt néceſſaire: les quadrilatères $ADBI$, $AECL$ ſeront deux parallélogrammes rectangles dont les diagonales AB, AC repréſenteront les puiſſances P, Q.

Donc *(n.° 227)* à la place de la puiſſance P repréſentée par la diagonale AB du parallélogramme rectangle $ADBI$, on pourra prendre deux autres forces repréſentées par les côtés contigus AD, AI de ce rectangle; & au lieu de la puiſſance Q exprimée par la diagonale AC du rectangle $AECL$, on pourra prendre deux autres forces repréſentées par les côtés contigus AE, AL du même rectangle.

Par cette décompoſition, au lieu des deux puiſſances P, Q repréſentées par les parties AB, AC de leurs directions, on aura quatre autres forces exprimées par AD, AI, AE, AL, tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions.

Mais deux de ces quatre forces, ſavoir, celles qui ſont repréſentées par AI & AL, ſe détruiſent mutuellement; car elles ſont directement oppoſées, puiſqu'elles ont leurs directions dans une même droite IL & qu'elles tirent le point A en ſens contraire; & elles ſont égales, puiſque les triangles rectangles BDF, CEA ſont parfaitement égaux, ce qui eſt facile à reconnoître, & que leurs côtés BD, CE ſont par conſéquent égaux: d'où il ſuit que les droites AI, AL ſont auſſi égales.

Ainſi des quatre forces repréſentées par AD, AI, AE, AL, il ne reſte que les deux forces repréſentées par AD, AE dont les directions ſont dans la même droite AF.

Fig. 162. Dans la figure 162, les deux forces reſtantes AD, AE ayant la même direction, leur réſultante eſt égale à leur ſomme $AD + AE$: & comme $AD + AE = AF$ à cauſe de l'égalité parfaite des deux triangles BDF, CEA, la même réſultante eſt égale à $AD + DF$ ou à AF.

Donc

Donc la réſultante des deux puiſſances P, Q, qui eſt la même que celle des deux forces reſtantes AD, AE, eſt repréſentée par la diagonale AF du parallélogramme quelconque $ABFC$.

Dans la figure 163, les deux forces reſtantes AD, AE ayant des directions oppoſées, leur réſultante eſt égale à leur différence $AD - AE$: & comme $DF = AE$ à cauſe de l'égalité parfaite des deux triangles BDF, CEA, la réſultante des deux puiſſances P, Q ſera exprimée par $AD - DF$, c'eſt-à-dire, par la diagonale AF du parallélogramme $ABFC$. Fig. 163.

Donc en général lorſque deux puiſſances P, Q ſeront repréſentées par les côtés contigus d'un parallélogramme quelconque $ABFC$ rectangle ou non rectangle, leur réſultante ſera toûjours repréſentée, tant pour ſa direction que pour ſa grandeur, par la diagonale AF du même parallélogramme. *C. Q. F. D.* Fig. 162 & 163.

COROLLAIRE I.

229. Lorſqu'on aura deux puiſſances P, Q repréſentées par les côtés contigus AB, AC d'un parallélogramme $ABFC$ rectangle ou non rectangle, on pourra donc les ſupprimer, & prendre à leur place une ſeule force R repréſentée par la diagonale AF du même parallélogramme, tant pour ſa direction que pour ſa grandeur. Car les deux puiſſances P, Q repréſentées par les côtés AB, AC, ne compoſeront enſemble qu'une réſultante qui ſera exprimée par la diagonale AF du parallélogramme $ABFC$, & qui par conſéquent ne différera en rien de la force R qu'on prendra à leur place. Fig. 162 & 163.

Comme un parallélogramme $ABFC$ n'a qu'une

ſeule diagonale qui parte du ſommet de l'angle *A* où concourent les directions des deux puiſſances *P, Q*, il eſt évident qu'il n'y a qu'une ſeule force réſultante qui puiſſe être priſe à la place des deux puiſſances *P, Q*.

COROLLAIRE II.

Fig. 164. 230. Et réciproquement ſi l'on a une puiſſance *R* qui ſoit repréſentée, tant pour ſa grandeur que pour ſa direction, par la diagonale *AD* d'un parallélogramme quelconque *ABFC*, on pourra ſupprimer cette puiſſance *R*, & prendre à ſa place deux autres puiſſances *P, Q* repréſentées par les côtés contigus *AB, AC* de ce parallélogramme.

Mais une même droite *AF* pouvant ſervir de diagonale à une infinité de parallélogrammes différens *ALFK, AIFM, ABFC, &c.* & les côtés contigus à l'angle *A* de chacun de ces parallélogrammes pouvant être pris à la place de la puiſſance *R;* il eſt clair que pour une même puiſſance *R* repréſentée par une droite *AF*, on peut prendre deux à deux une infinité de différentes puiſſances qui ſeront repréſentées par les côtés contigus d'une infinité de parallélogrammes différens.

Car les deux puiſſances que l'on prendra, & qui ſeront repréſentées par les côtés contigus *AB, AC*, ou *AL, AK*, ou *AI, AM, &c.* d'un parallélogramme dont *AF* ſera la diagonale, ne produiront qu'une ſeule & même force réſultante qui ſera repréſentée par la diagonale *AF*, & qui ne différera par conſéquent en rien de la puiſſance *R* qu'on ſuppoſe repréſentée par la même diagonale *AF*.

COROLLAIRE III.

231. Si l'on fait attention à la démonſtration du Théorème, non ſeulement on y reconnoîtra que les forces compoſantes P, Q exprimées tant pour leurs valeurs que pour leurs directions par les côtés contigus AB, AC du parallélogramme $ABFC$, ſe réduiſent à une ſeule force réſultante R repréſentée tant pour ſa valeur que pour ſa direction par la diagonale AF du même parallélogramme; mais on y verra encore pour combien de force & de quelle manière chacune des deux puiſſances P, Q contribue à la compoſition de la force réſultante R. Fig. 162 & 163.

Car on y démontre que ſi des extrémités B, C des côtés AB, AC par leſquels les puiſſances P, Q ſont repréſentées, l'on mène des perpendiculaires BD, CE à la diagonale AF prolongée s'il eſt néceſſaire, les parties AD, AE de cette diagonale, compriſes entre ces perpendiculaires & le point A où concourent les directions des deux puiſſances P, Q, repréſenteront les quantités de force pour leſquelles les puiſſances P, Q contribueront à la compoſition de la force réſultante R.

On y démontre encore que ſi les perpendiculaires BD, CE ſont au dedans du parallélogramme $ABFC$, les forces AD, AE pour leſquelles les puiſſances P, Q contribuent à la compoſition de la force réſultante R, doivent être ajoûtées enſemble pour faire une ſomme égale à cette réſultante. Au contraire ſi les perpendiculaires BD, CE tombent au dehors du parallélogramme $ABFC$, & ne rencontrent que les prolongemens FD, AE de ſa diagonale, les forces AD, AE pour leſquelles les puiſſances P, Q contribueront à la compoſition de la force réſultante R, Fig. 162.

ſeront oppoſées; & il faudra ſouſtraire la plus petite de la plus grande, pour avoir la force réſultante R qui aura la direction de la plus grande AD des deux forces oppoſées.

COROLLAIRE IV.

Fig. 165 & 166. **232.** Si l'on fait un triangle GHI dont les côtés GH, HI, GI ſoient parallèles aux directions des puiſſances P, Q & de leur réſultante R; ces puiſſances P, Q & leur réſultante R ſeront proportionnelles aux côtés GH, HI, GI du triangle GHI, & chacune de ces trois forces ſera correſpondante au côté parallèle à ſa direction; c'eſt-à-dire qu'on aura $P : Q : R :: GH : HI : GI$.

Car les deux puiſſances P, Q étant repréſentées par AB, AC, & le parallélogramme $ABFC$ étant conſtruit pour avoir ſa diagonale AF qui doit repréſenter la force réſultante R, on aura $P : Q : R :: AB : AC : AF$ ou $:: AB : BF : AF$; parce que $AC = BF$.

Mais les deux triangles ABF, GHI ayant les côtés parallèles chacun à chacun, ſeront ſemblables & donneront $AB : BF : AF :: GH : HI : GI$.

On aura donc $P : Q : R :: GH : HI : GI$.

COROLLAIRE V.

Fig. 165 & 167. **233.** Si l'on fait un triangle MNO dont les côtés MN, NO, MO ſoient perpendiculaires ſur les directions des puiſſances P, Q & de leur réſultante R; ces puiſſances P, Q & leur réſultante R ſeront proportionnelles aux côtés du triangle MNO, & chacune de ces trois forces ſera correſpondante au côté perpendiculaire à ſa direction; c'eſt-à-dire qu'on aura $P : Q : R :: MN : NO : MO$.

Car les puiſſances P, Q étant repréſentées par les parties AB, AC de leurs directions, & le parallélogramme $ABFC$ étant conſtruit pour avoir ſa diagonale AF qui doit repréſenter la force réſultante R, on aura, comme dans le Corollaire précédent, $P : Q : R :: AB : BF : AF$.

Mais les deux triangles ABF, MNO ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, ſeront ſemblables & donneront $AB : BF : AF :: MN : NO : MO$.

On aura donc $P : Q : R :: MN : NO : MO$.

THEOREME.

234. *Si par le point* A, *où concourent les directions de deux puiſſances* P, Q *& celle de leur force réſultante* R, *on décrit une circonférence de cercle* AMGN *qui rencontre les directions de ces puiſſances en* M, N, *& celle de leur réſultante en* G, *& qu'on joigne ces trois points par les trois cordes* GM, GN, MN; *la valeur de chacune de ces trois forces, & non ſa direction, ſera repréſentée par la corde qui ſe terminera aux directions des deux autres forces; c'eſt-à-dire que l'on aura* P : Q : R :: GN : GM : MN. Fig. 168, 169, 170, 171 & 172.

DÉMONSTRATION.

Par un point quelconque F de la direction de la réſultante R ſoient menées deux droites FC, FB parallélement aux directions des deux puiſſances compoſantes P, Q: les triangles ACF, MGN ſeront ſemblables. Car les deux angles CAF, GMN ayant leurs ſommets à la circonférence, & étant appuyés ſur le même arc GN, ſeront égaux *(Géom. n.° 88)*; & l'angle AFC ou ſon égal BAF ſera de même grandeur que l'angle GNM, puiſque *(fig. 168, 169*

& 172) ils auront tous deux pour meſure la moitié du même arc GM, & que *(fig. 170, 171 & 173)* ils auront pour meſure la moitié de la ſomme des deux arcs AG, AM.

Or les triangles ſemblables ACF, MGN donneront $CF : CA : AF :: GN : GM : MN$; & l'on aura* *(n.° 228)* $P : Q : R :: AB : AC : AF$ ou $:: CF : CA : AF$.

On aura donc $P ; Q : R :: GN : GM : MN$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 168, 169, 170, 171, 172 & 173.

235. Puiſque *(n.° 234)* $P : Q : R :: GN : GM : MN$, on aura $\begin{cases} P : Q :: GN : GM \\ Q : R :: GM : MN \\ P : R :: GN : MN. \end{cases}$

Or 1.° les cordes GM, GN qui partent d'un même point G de la direction de la réſultante R des deux puiſſances P, Q, comprennent des angles égaux GMS, GNA avec les directions de ces deux puiſſances : car ces angles, qui ont leurs ſommets à la circonférence, ont tous deux pour meſure la moitié de la ſomme des deux arcs AM, MG *(fig. 168, 169 & 172)*, & la moitié de l'arc AZG *(fig. 170, 171 & 173)*. Ainſi puiſqu'on a trouvé $P : Q :: GN : GM$, on doit conclurre que ſi d'un point quelconque G de la direction de la réſultante des deux puiſſances P, Q, l'on mène vers les directions de ces puiſſances deux droites GM, GN qui faſſent avec ces directions deux angles égaux GMS, GNA, les deux puiſſances P, Q ſeront en raiſon réciproque de ces deux droites GM, GN.

2.° Les cordes *MN*, *MG* menées d'un même point *M* de la direction de la puiſſance *P*, & terminées par les directions de la puiſſance *Q* & de la réſultante *R*, ſont des angles égaux *MNA*, *MGA* avec ces deux dernières directions : car ces angles ont tous deux le ſommet à la circonférence du même cercle & ſont appuyés ſur le même arc *AM*. Ainſi puiſque $Q : R :: MG : MN$, on conclurra que la puiſſance *Q* & la réſultante *R* des deux puiſſances *P*, *Q* ſont réciproquement proportionnelles aux deux droites *MN*, *MG* qui ſont des angles égaux avec leurs directions, & qui ſont tirées d'un même point *M* de la direction de la puiſſance *P*.

3.° Les deux cordes *NM*, *NG* tirées d'un même point *N* de la direction de la puiſſance *Q*, & terminées par les directions de la puiſſance *P* & de la réſultante *R*, ſont avec ces deux dernières directions *(fig. 168, 169 & 172)* des angles *NMA*, *NGA* qui ſont égaux, puiſqu'ils ſont à la circonférence d'un même cercle & qu'ils comprennent un même arc *AN* ; & *(fig. 170, 171 & 173)* les mêmes droites *NM*, *NG* ſont avec les directions *AP*, *AR* des angles *NMA*, *NGR* qui ſont égaux, puiſque chacun d'eux a pour meſure la moitié de la ſomme des deux arcs *AZG*, *GN*. Ainſi puiſque $P : R :: NG : NM$, on doit conclurre que la puiſſance *P* & la réſultante *R* des deux puiſſances *P*, *Q* ſont réciproquement proportionnelles aux deux droites *NM*, *NG* qui ſont des angles égaux avec leurs directions, & qui partent d'un même point *N* de la direction de la puiſſance *Q*.

COROLLAIRE II.

Fig. 169. 236. 1.° Si la partie AG de la direction de la réſultante R eſt le diamètre de la circonférence décrite par le point A, les deux angles GMA, GNA ſeront droits, & les deux cordes GM, GN ſeront par conſéquent perpendiculaires ſur les directions des deux puiſſances P, Q. Ainſi puiſque $P:Q::GN:GM$, on conclurra que deux puiſſances P, Q ſont en raiſon réciproque des perpendiculaires menées d'un même point G de la direction de leur réſultante, ſur leurs directions.

Fig. 170. 2.° Si le diamètre AM de la circonférence qu'on a décrite par le point A, eſt dans la direction de la puiſſance P, les deux angles MNA, MGA ſeront droits, & les deux cordes MN, MG ſeront par conſéquent perpendiculaires, l'une ſur la direction de la puiſſance Q, l'autre ſur celle de la réſultante R des deux puiſſances P, Q. Ainſi puiſqu'on a trouvé $Q : R :: MG : MN$, on conclurra que la puiſſance Q & la réſultante R des deux puiſſances P, Q ſont réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires MN, MG tirées d'un même point M de la direction de la puiſſance P ſur leurs directions AQ, AR.

Fig. 171. 3.° Si le diamètre de la circonférence décrite par le point A eſt une partie AN de la direction de la puiſſance Q, les deux cordes NM, NG ſeront perpendiculaires, l'une ſur la direction de la puiſſance P, l'autre ſur la direction de la réſultante R des deux puiſſances P, Q. Ainſi puiſque $P : R :: NG : NM$, la puiſſance P & la réſultante R des deux puiſſances P, Q ſont réciproquement proportionnelles aux

perpendiculaires *NM, NG* tirées d'un même point *N* de la direction de la puiſſance *Q* ſur leurs directions *AP, AR.*

THEOREME.

237. *Lorſque les directions de deux puiſſances* P, Q *& de leur réſultante* R *concourent en un même point* A, *& ſont par conſéquent dans un même plan; ſi l'on tire une droite* MNO *qui rencontre les directions de ces trois forces en trois points quelconques* M, N, O, *on aura* P : Q : R :: AM × NO : AN × MO : AO × MN; *c'eſt-à-dire que la valeur de chacune des trois forces* P, Q, R *ſera repréſentée par la portion de la ligne* MNO, *compriſe entre les directions des deux autres, multipliée par la partie de ſa propre direction, compriſe entre la droite* MNO *& le point de concours* A. Fig. 169, 170, 172 & 173.

DÉMONSTRATION.

Si par un point quelconque *F* de la direction de la réſultante *R* des deux puiſſances *P, Q*, l'on mène des parallèles *FC, FB* aux directions de ces deux puiſſances; on aura un parallélogramme *ABFC* dont les côtés contigus *AB, AC* & la diagonale *AF* pourront repréſenter les trois forces *P, Q, R:* ainſi l'on aura $P : Q : R :: AB : AC : AF$.

Par un angle *C* du parallélogramme *ABFC*, ſoit menée la droite *LIC* parallèlement à *MNO;* ces deux parallèles ſeront coupées en parties proportionnelles par les directions des trois forces *P, Q, R;* c'eſt-à-dire que l'on aura $LI : CI :: MO : NO$; & comme les triangles ſemblables *AIL, FIC*

donneront $\left\{\begin{matrix} AI : FI \\ AL : FC = AB \end{matrix}\right\} :: LF : CI$, on aura

auſſi $\left\{\begin{matrix} AI : FI \\ AL : AB \end{matrix}\right\} :: MO : NO.$

Or 1.° de la proportion $AI : FI :: MO : NO$ on conclurra *componendo* pour les figures 169 & 172, & *detrahendo* pour les figures 170 & 173,

$\left\{\begin{matrix} AI : AI + FI :: MO : MO + NO \\ AI : AI - FI :: MO : MO - NO \end{matrix}\right\}$ ou $AI : AF :: MO : MN.$

Mais les triangles ſemblables ACI, ANO donneront $\left\{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} AC : AI :: AN : AO.$

Donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $AC : AF :: AN \times MO : AO \times MN.$

2.° Puiſque $AL : AB :: MO : NO$, ou $AB : AL :: NO : MO$,

& que les triangles ſemblables ALC, AMN donneront $\left\{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} AL : AC :: AM : AN;$

Si l'on multiplie ces deux proportions par ordre, on aura $AB : AC :: AM \times NO : AN \times MO.$

Or on a trouvé $AC : AF :: AN \times MO : AO \times MN.$

Ainſi $AB : AC : AF :: AM \times NO : AN \times MO : AO \times MN.$

Mais $P : Q : R :: AB : AC : AF.$

Donc on aura enfin

$P : Q : R :: AM \times NO : AN \times MO : AO \times MN.$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

238. Lorſque le point A où concourent les directions des deux puiſſances P, Q & celle de leur réſultante R ſera infiniment éloigné de la droite MNO, ces directions ſeront parallèles comme dans les figures 175 & 176, & leurs parties infinies AM, AN, AO deviendront égales; ainſi l'on aura $AM \times NO : AN \times MO :: AO \times MN :: NO : MO : MN$. Et comme on vient de démontrer *(n.° 237)* que $P : Q : R :: AM \times NO : AN \times MO : AO \times MN$, on aura $P : Q : R :: NO : MO : MN$; c'eſt-à-dire que ſi l'on coupe les directions parallèles de deux puiſſances P, Q & celle de leur réſultante R par une droite MNO, la quantité de chacune de ces trois forces ſera repréſentée par la partie de cette droite MNO, qui ſe trouvera compriſe entre les directions des deux autres. Fig. 168, 170, 172 & 173.

COROLLAIRE II.

239. Mais lorſque les directions des deux puiſſances P, Q & de leur réſultante R ſont parallèles, la ligne MN, par laquelle la valeur de la réſultante R eſt repréſentée, eſt égale à la ſomme ou à la différence des deux lignes NO, MO qui repréſentent les deux puiſſances P, Q, ſuivant que ces deux puiſſances tirent ou ne tirent pas d'un même côté. Fig. 175 & 176.

Ainſi la réſultante de deux puiſſances P, Q, dont les directions ſont parallèles, eſt égale à la ſomme ou à la différence de ces puiſſances, ſuivant qu'elles tirent ou ne tirent pas d'un même côté; c'eſt-à-dire que *(fig. 175)* la réſultante $R = P + Q$, & *(fig. 176)* la réſultante $R = P - Q$.

THEOREME.

Fig. 165. **240.** *Les deux puiſſances* P, Q *& leur réſultante* R *ſont trois forces dont chacune peut être repréſentée par le ſinus de l'angle que les directions des deux autres ſont entr'elles; c'eſt-à-dire que ſi l'on prend* S *pour la caractériſtique des ſinus, on aura*

P : Q : R :: S.CAF : S.BAF : S.BAC.

DÉMONSTRATION.

Par un point quelconque *F* de la direction de la réſultante *R*, ſoient menées des parallèles *FC*, *FB* aux directions des deux puiſſances *P*, *Q*: le quadrilatère *ABFC* ſera un parallélogramme dont les côtés *AB*, *AC* & la diagonale *AF* repréſenteront les deux puiſſances *P*, *Q* & la réſultante *R*. Ainſi l'on aura *P* : *Q* : *R* :: *AB* : *AC* : *AF*, ou :: *AB* : *BF* : *AF* parce que *BF* = *AC*.

Mais *(Géom. n.° 576)* les côtés d'un triangle étant proportionnels au ſinus des angles qui leur ſont oppoſés, on aura *AB* : *BF* : *AF* :: *S.AFB* : *S.BAF* : *S.ABF*. ou :: *S.CAF* : *S.BAF* : *S.BAC*, parce que l'angle *AFB* eſt égal à ſon alterne *CAF*, & que les deux angles *ABF*, *BAC*, qui valent enſemble deux droits, ont le même ſinus.

On aura donc *P* : *Q* : *R* :: *S.CAF* : *S.BAF* : *S.BAC*. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Fig. 165. **241.** Si l'on prolonge la direction de la réſultante *R* au delà du point *A* vers *D*, le prolongement de la direction de la puiſſance *P* paſſera dans l'angle *QAD* formé par la direction de la puiſſance

Q & par le prolongement de la direction de la réſultante R; & le prolongement de la direction de la puiſſance Q paſſera dans l'angle PAD formé par la direction de la puiſſance P & par le prolongement de la direction de la réſultante R. De plus, on aura $S.CAF = S.QAD$, & $S.BAF = S.PAD$.

Ainſi puiſque $P : Q : R :: S.CAF : S.BAF : S.BAC$, on aura auſſi $P : Q : R :: S.QAD : S.PAD : S.BAC$; c'eſt-à-dire que les deux puiſſances P, Q & leur réſultante R ſont proportionnelles aux ſinus des angles au travers deſquels paſſent leurs directions.

SCHOLIE.

Lorſque l'on connoîtra les valeurs de deux puiſſances P, Q & leurs directions ſituées dans un même plan, les quatre derniers Théorèmes & leurs Corollaires donneront différens moyens pour trouver la valeur & la direction de la force réſultante R de ces deux puiſſances.

I.

242. Si l'on peut avoir le point A où concourent les directions des deux puiſſances P, Q, on prendra ſur leurs directions, à commencer de ce point A, deux parties AB, AC, pour repréſenter ces puiſſances; c'eſt-à-dire qu'on fera $AB : AC :: P : Q$. Puis ayant fait un parallélogramme $ABFC$ qui ait pour côtés contigus les deux parties AB, AC, on mènera la diagonale AF qui repréſentera la valeur & la direction de la force réſultante R des deux puiſſances P, Q. Fig. 165.

Cette pratique eſt contenue mot à mot dans la démonſtration du Théorème cotté 228.

Fig. 165. **243.** Comme les deux diagonales *AF, BC* d'un parallélogramme *ABFC* ſe coupent mutuellement en deux parties égales ; après avoir pris ſur les directions des deux puiſſances *P, Q*, à commencer de leur point de concours *A*, deux parties *AB, AC* pour repréſenter ces puiſſances, on auroit pû ſe diſpenſer d'achever le parallélogramme *ABFC*. Car en tirant la droite *BC*, & menant du point *A* par ſon milieu *E* une droite *AF* double de *AE*, cette droite *AF* ſeroit la diagonale d'un parallélogramme *ABFC*, & repréſenteroit par conſéquent la valeur & la direction de la réſultante *R* des deux puiſſances *P, Q*.

Fig. 165 & 166. **244.** On peut auſſi trouver la valeur & la direction de la réſultante *R* des deux puiſſances *P, Q* en menant par un point quelconque *H* deux droites *HG, HI*, parallèles aux directions de ces puiſſances & proportionnelles à leurs quantités de force. Car ſi l'on tire la droite *GI*, & que par le point de concours *A* des directions des deux puiſſances *P, Q*, l'on mène la droite *AR* parallèlement à *GI*, cette droite *AR* ſera la direction de la réſultante des deux puiſſances *P, Q*, & la droite *GI* repréſentera la quantité de force de cette réſultante, pendant que les deux droites *HG, HI* repréſenteront les quantités de force des deux puiſſances *P, Q*.

Car ſi l'on prend ſur la droite *AR* une partie *AF* = *GI*, & qu'on mène deux droites *FC, FB* parallèles aux directions des deux puiſſances *P, Q* : les deux triangles *ABF, GHI* ſeront ſemblables & égaux, puiſqu'ils auront les côtés parallèles chacun à chacun, & les côtés *AF, GI* égaux par conſtruction : & comme les quantités de force des deux puiſſances *P, Q* ſont

ſuppoſées repréſentées par les deux droites HG, HI, elles ſeront auſſi repréſentées par AB, BF ou par les deux parties AB, AC de leurs directions, c'eſt-à-dire, par les côtés contigus du parallélogramme $ABFC$. Ainſi *(n.° 228)* la réſultante des deux puiſſances P, Q ſera repréſentée par la diagonale AF du même parallélogramme $ABFC$, tant pour ſa direction que pour ſa quantité de force. Donc la droite AR qu'on a menée parallèlement à GI eſt la direction de la force réſultante des deux puiſſances P, Q, & la droite $GI = AF$ repréſente la quantité de force de cette réſultante, pendant que les deux droites GH, HI repréſentent les valeurs des deux puiſſances P, Q.

Comme la réſultante R *des deux puiſſances* P, Q *doit paſſer dans l'angle* PAQ *compris entre les directions de ces deux puiſſances, lorſqu'on mènera par le point quelconque* H *deux droites* HG, HI *proportionnelles aux deux puiſſances* P, Q *& parallèles à leurs directions, on doit avoir attention que ces deux lignes faſſent entr'elles un angle* GHI *égal au ſupplément de l'angle* PAQ *que les puiſſances* P, Q *comprennent entre leurs directions. Car ſi l'on tiroit parallèlement à la direction de la puiſſance* Q *une droite* HL *qui fît avec* GH *un angle* GHL *égal à l'angle* PAQ, *& ſi l'on menoit la droite* GL; *la ligne qu'on mèneroit par le point* A *parallèlement à* GL *ne paſſeroit pas dans l'angle* PAQ, *& ne pourroit par conſéquent pas être la direction de la réſultante des deux puiſſances* P, Q.

245. On peut encore trouver la valeur & la direction de la réſultante R des deux puiſſances P, Q, en menant par un point quelconque N deux droites NM, NO perpendiculaires aux directions AP, AQ Fig. 165 & 167.

de ces deux puiſſances & proportionnelles à leurs quantités de force. Car ſi l'on tire la droite OM, & que par le point de concours A des directions des deux puiſſances P, Q, l'on mène la droite AR perpendiculairement à OM, cette droite AR ſera la direction de la réſultante des deux puiſſances P, Q; & la droite OM repréſentera la quantité de force de cette réſultante, pendant que les deux droites NM, NO repréſenteront les valeurs des deux puiſſances P, Q.

Pour le démontrer, ſoit priſe ſur la droite AR une partie $AF = OM$, & ſoient tirées par le point F deux parallèles FC, FB aux directions des puiſſances P, Q: le quadrilatère $ABFC$ ſera un parallélogramme, & les deux triangles ABF, MNO ſeront ſemblables & égaux, puiſqu'ils auront les côtés perpendiculaires chacun à chacun, & les côtés AF, MO égaux par conſtruction. Or les quantités de force des deux puiſſances P, Q étant ſuppoſées proportionnelles aux deux lignes MN, NO, ſeront auſſi proportionnelles aux deux lignes AB, BF, ou aux deux parties AB, AC des directions des deux puiſſances P, Q. Ainſi (*n.° 228*) la réſultante des deux puiſſances P, Q ſera repréſentée, tant pour ſa direction que pour ſa quantité de force, par la diagonale AF du parallélogramme $ABFC$; c'eſt-à-dire que la réſultante des deux puiſſances P, Q ſera dirigée ſuivant la droite AR qu'on a menée par le point A perpendiculairement ſur MO, & que la droite MO, qui par conſtruction eſt égale à AF, repréſentera la quantité de force de cette réſultante, pendant que les deux droites MN, NO repréſenteront les quantités de force des deux puiſſances P, Q.

Si l'on remarque, comme on a fait dans le numéro précédent, que la réſultante R *des deux puiſſances* P, Q *doit néceſſairement paſſer dans l'angle* PAQ *compris entre les directions de ces puiſſances, on reconnoîtra que les droites* NM, NO, *menées par le point quelconque* N *perpendiculairement aux directions des deux puiſſances* P, Q, *doivent faire un angle* MNQ *égal au ſupplément de l'angle* PAQ *compris entre ces directions. Car ſi l'on menoit* NL *dans la direction de* ON *ou perpendiculairement ſur* AQ, *de manière que l'angle* MNL *fût égal à l'angle* PAQ, *& ſi l'on tiroit* ML; *la droite qu'on mèneroit par le point* A *perpendiculairement ſur* ML *ne paſſeroit pas dans l'angle* PAQ, *& ne pourroit par conſéquent pas être la direction de la réſultante des deux puiſſances* P, Q.

246. Enfin ſi l'on connoît les quantités de force des deux puiſſances *P, Q* & l'angle *BAC* que leurs directions font entr'elles, on pourra déterminer par la Trigonométrie la direction & la valeur de leur force réſultante *R*. Car ayant imaginé un parallélogramme *ABFC* dont les côtés contigus *AB, AC* ſoient pris ſur les directions des puiſſances *P, Q*, & ſoient proportionnels à ces puiſſances, en ſorte que ſa diagonale *AF* repréſente la force réſultante *R* des mêmes puiſſances; on connoîtra les deux côtés *AB, BF* & l'angle *ABF* du triangle *ABF*. Ainſi *(Géom. n.° 588)* on trouvera les deux angles *BAF, BFA*, ou *BAF, CAF* que les directions des deux puiſſances *P, Q* font avec la direction de leur réſultante *R*; & l'on trouvera auſſi la valeur de la droite *AF* qui repréſente cette réſultante. Fig. 174.

II.

Fig. 174. **247.** Si le point A où concourent les directions des deux puiſſances P, Q eſt trop éloigné pour ſervir d'origine aux proportionnelles de ces puiſſances, & pour aider à diriger leur réſultante R, on mènera par un point quelconque B de la direction de l'une P de ces puiſſances une droite indéfinie BF parallèle à la direction de l'autre puiſſance Q; puis ayant pris ſur BA, BF des parties Ba, Bf proportionnelles aux deux puiſſances P, Q, on mènera la droite af, & l'on aura un triangle aBf dont les côtés aB, Bf, af repréſenteront les quantités de force des deux puiſſances P, Q & celle de leur réſultante R dont la direction ſera parallèle à af (*n.° 244*).

Pour trouver la vraie direction de la réſultante R, on tirera par le point B & par le milieu de la droite af une droite BeC qui rencontrera la direction de la puiſſance Q en quelque point C; & par le milieu E de la droite BC, on mènera parallèlement à af une droite DR qui ſera la direction de la réſultante R.

Pour le démontrer, on achèvera le parallélogramme $aBfc$, & l'on imaginera par le point C une droite CF parallèle à AP, qui rencontrera le prolongement de la droite Bf en quelque point F; c'eſt-à-dire qu'on imaginera un parallélogramme $ABFC$ ſemblable au parallélogramme $aBfc$, & dont les côtés AB, BF ou AB, AC ſeront proportionnels aux côtés aB, Bf: & comme les deux lignes aB, Bf ſont, par conſtruction, proportionnelles aux deux puiſſances P, Q, la réſultante de ces deux puiſſances ſera dirigée ſuivant la diagonale AF. Mais la diagonale AF du parallélogramme $ABFC$ coupe néceſſairement l'autre

diagonale BC en deux parties égales, & est parallèle à la diagonale af du parallélogramme semblable $aBfc$. Ainsi la force résultante des deux puissances P, Q doit être dirigée suivant une droite DR menée par le milieu E de BC parallèlement à la droite af.

III.

248. Lorsque les directions des deux puissances P, Q seront parallèles, on mènera par deux points quelconques de ces directions une droite MN dans laquelle ou dans le prolongement de laquelle on déterminera un point O tel que l'on ait $R : P :: MN : NO$; puis on mènera par le point O parallèlement aux directions des deux puissances P, Q une droite OR qui sera *(n.° 238)* la direction de la résultante des deux puissances P, Q. Fig. 175 & 176.

On remarquera que le point O doit être pris entre les directions des deux puissances P, Q, & que la résultante est égale à leur somme lorsque ces deux puissances tirent d'un même côté; au lieu que le point O doit être pris dans le prolongement de la ligne MN du côté de la plus grande des deux puissances, & que la résultante est égale à leur différence lorsque ces puissances ne tirent pas d'un même côté. Fig. 175. Fig. 176.

PROBLEME.

249. *Trouver la résultante de tant de puissances* P, Q, R, S *qu'on voudra, qui tirent ou poussent toutes le même point* A *avec des quantités de force connues, suivant des directions données quelconques, situées ou non situées dans un même plan.* Fig. 177.

SOLUTION.

On prendra sur les directions AP, AQ, AR, AS

de ces puiſſances, à commencer du point A d'où elles partent toutes, des parties AB, AC, AD, AE proportionnelles aux quantités de force qu'elles exercent; en ſorte que ces puiſſances ſoient repréſentées, tant pour leur force que pour leurs directions, par leurs proportionnelles AB, AC, AD, AE. Cela poſé,

1.° On fera un parallélogramme $ABFC$ qui ait pour côtés contigus les deux droites AB, AC par leſquelles deux quelconques P, Q des puiſſances données ſont repréſentées; & l'on tirera la diagonale AF qui *(n.° 228)* repréſentera la force réſultante des deux puiſſances P, Q; en ſorte qu'on pourra ſupprimer ces deux puiſſances, & prendre à leur place une force repréſentée par AF, tant pour ſa valeur que pour ſa direction. Alors le Problème ſe réduira à trouver la réſultante des puiſſances repréſentées par AF, AD, AE.

2.° On fera un ſecond parallélogramme $AFGD$ qui ait pour côtés contigus la diagonale AF du premier parallélogramme, & la droite AD par laquelle on a repréſenté une troiſième puiſſance R; puis on tirera la diagonale AG qui *(n.° 228)* repréſentera la réſultante des deux forces exprimées par AF, AD: & comme la force exprimée par AF eſt la réſultante des deux puiſſances P, Q, la force repréſentée par AG ſera la réſultante des trois puiſſances P, Q, R exprimées par AB, AC, AD. On pourra donc ſupprimer les trois puiſſances P, Q, R, & prendre à leur place la ſeule force repréſentée par AG; ce qui réduira le Problème à trouver la réſultante de deux forces repréſentées par AG, AE.

3.° On fera un troiſième parallélogramme $AGHE$ qui ait pour côtés contigus la diagonale AG du dernier parallélogramme, par laquelle la réſultante des

trois puiſſances P, Q, R eſt repréſentée, & la droite AE par laquelle la puiſſance S eſt exprimée; puis on mènera la diagonale AH qui repréſentera la quantité de force & la direction de la réſultante des deux forces AG, AE ou des quatre puiſſances P, Q, R, S données de grandeur & de direction. *C. Q. F. T.*

Si l'on avoit un plus grand nombre de puiſſances, on feroit un nouveau parallélogramme qui auroit pour côtés contigus la diagonale du dernier parallélogramme & une droite repréſentant une nouvelle puiſſance; puis on en tireroit la diagonale qui repréſenteroit une nouvelle réſultante. Enfin l'on répéteroit la même opération juſqu'à ce que toutes les puiſſances fuſſent réduites à une ſeule force réſultante.

Il ſuit de la ſolution de ce Problème qu'il faut faire autant de parallélogrammes moins un, qu'il y a de puiſſances à réduire à une ſeule force réſultante.

COROLLAIRE.

250. Comme les deux diagonales AF, BC du premier parallélogramme $ABFC$ ſe coupent mutuellement en deux parties égales, il eſt évident que pour avoir l'expreſſion AF de la réſultante des deux puiſſances P, Q, il ſuffit de joindre les extrémités de leurs proportionnelles AB, AC par une droite BC, & de tirer du point A par le milieu I de cette ligne une droite AIF double de AI; car cette droite AIF ſera la diagonale du parallélogramme $ABFC$, & repréſentera par conſéquent la réſultante des deux puiſſances P, Q. Fig. 178.

Si par le point I & par l'extrémité D de la ligne AD qui repréſente la troiſième puiſſance R, on mène la droite ID; cette ligne coupera la diagonale

AG du ſecond parallélogramme $AFGD$ en quelque point K, de manière que l'on aura $IK = \frac{1}{3} ID$ & $AK = \frac{1}{3} AG$.

Car les côtés oppoſés AF, DG du ſecond parallélogramme étant parallèles, les triangles AKI, GKD ſeront ſemblables, & l'on aura ces proportionnelles $AI : IK : AK :: GD : DK : GK$.

Mais AI eſt la moitié de AF & eſt par conſéquent égal à la moitié de DG. Donc les deux lignes IK, AK ſont auſſi égales aux moitiés des lignes correſpondantes DK, GK, & ſont par conſéquent égales aux tiers des lignes entières ID, AG.

Fig. 179. On pourra donc, ſans faire aucun parallélogramme, trouver l'expreſſion de la réſultante de trois puiſſances P, Q, R données de grandeur & de direction.

Car ſi du milieu I de la droite BC tirée par les extrémités des proportionnelles aux deux premières puiſſances P, Q, l'on mène une droite ID à l'extrémité de la droite qui repréſente la troiſième puiſſance; & qu'après avoir fait $IK = \frac{1}{3} ID$, l'on tire la droite AK, & qu'on la prolonge de manière qu'on ait $AG = 3 AK$; cette droite AG ſera la diagonale du ſecond parallélogramme $AFGD$ de la figure 178, & repréſentera par conſéquent la direction & la quantité de force de la réſultante des trois puiſſances P, Q, R.

Fig. 178. Si par le point K & par l'extrémité E de la droite AE qui repréſente la quatrième puiſſance, on mène une droite KE, elle coupera la diagonale AH du troiſième parallélogramme en quelque point L, de manière qu'on aura $KL = \frac{1}{4} KE$ & $AL = \frac{1}{4} AH$.

Car les côtés oppoſés AG, EH du parallélogramme

$AGHE$ étant parallèles, les triangles ALK, HLE ſeront ſemblables, & l'on aura ces proportionnelles $AK : KL : AL :: HE : EL : HL$.

Mais on vient de voir que $AK = \frac{1}{3}AG$; & puiſque $AG = HE$, on aura auſſi $AK = \frac{1}{3}HE$: d'où il ſuit que les deux lignes KL, AL ſeront égales aux tiers des lignes correſpondantes EL, HL, & ſeront par conſéquent égales aux quarts des lignes entières KE, AH.

On pourra donc, ſans faire aucun parallélogramme, trouver la force réſultante AH de quatre puiſſances P, Q, R, S. Car ſi du milieu I de la droite BC qui joint les extrémités des proportionnelles des deux premières puiſſances, l'on mène une droite ID à l'extrémité de la proportionnelle de la troiſième puiſſance, & qu'ayant fait $IK = \frac{1}{3}ID$ l'on tire une droite KE du point K à l'extrémité de la droite AE par laquelle la quatrième puiſſance eſt repréſentée; enfin ſi l'on prend ſur cette droite KE une partie $KL = \frac{1}{4}KE$, & que l'on tire du point A par le point L une droite $AH = 4AL$, cette droite AH ſera la diagonale du troiſième parallélogramme $AGHE$ de la figure 178; ainſi elle repréſentera la direction & la quantité de force de la réſultante des quatre puiſſances P, Q, R, S. Fig. 179.

Si l'on avoit une cinquième puiſſance, on mèneroit une ligne droite du point L à l'extrémité de la ligne qui repréſenteroit cette cinquième puiſſance; & après avoir pris la cinquième partie de cette droite à commencer du point L, on mèneroit du point A à l'extrémité de cette partie une ligne droite qui ſeroit la direction de la réſultante des cinq puiſſances données;

& quintuplant cette ligne, on auroit la proportionnelle de cette réſultante.

DÉFINITIONS.

Fig. 179. **251.** Le point *A*, où concourent les directions de pluſieurs puiſſances *P, Q, R, S, &c.* s'appelle le *Centre des forces* de ces puiſſances.

Les points *I, K, L* qu'on vient de déterminer *(n.° 250)*, & par leſquels paſſent les forces réſultantes de ces puiſſances, ſe nomment *Centres principaux d'équilibre ;* c'eſt-à-dire que le point *I* eſt le centre principal d'équilibre des deux puiſſances *P, Q ;* le point *K* eſt le centre principal d'équilibre des trois puiſſances *P, Q, R ;* & le point *L* eſt le centre principal d'équilibre des quatre puiſſances *P, Q, R, S, &c.*

COROLLAIRE.

Fig. 179. **252.** Si l'on fait attention aux poſitions des centres principaux d'équilibre *I, K, L, &c.* on remarquera aiſément que chaque réſultante eſt à la diſtance qu'il y a entre le centre *A* des forces & le centre d'équilibre par lequel elle paſſe, comme le nombre des forces dont elle eſt la réſultante, eſt à l'unité ; c'eſt-à-dire que

1.° La réſultante *AF* qui paſſe par le centre d'équilibre *I* des deux puiſſances *P, Q* qui la compoſent, eſt à la diſtance *AI* du centre *A* des forces au centre principal d'équilibre *I*, comme 2 eſt à 1.

2.° La réſultante *AG* qui paſſe par le centre d'équilibre *K* des trois puiſſances *P, Q, R* dont elle eſt compoſée, eſt à la diſtance *AK* du centre *A* des forces au centre d'équilibre *K*, comme 3 eſt à 1.

3.° La réſultante AH qui paſſe par le centre d'équilibre L des quatre puiſſances P, Q, R, S dont elle eſt la réſultante, eſt à la diſtance AL du centre A des forces au centre L d'équilibre, comme 4 eſt à 1 : & ainſi des autres.

LEMME.

253. *Si des quatre angles* A, B, C, D *d'un même parallélogramme on mène quatre parallèles* AE, BF, CG, DH *vers un même plan* EFGH *qui ne rencontre point le parallélogramme, la ſomme* AE + CG *des deux parallèles tirées par les angles oppoſés* A, C *ſera égale à la ſomme* BF + DH *des deux autres parallèles menées par les deux autres angles oppoſés* B, D. Fig. 180 & 181.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées les deux diagonales AC, BD du parallélogramme $ABCD$, & par leur interſection I ſoit menée vers le plan $EFGH$ une droite IK parallèle aux quatre premières menées vers le même plan; enfin ſuppoſons que E, F, G, H, K ſont les points où ces cinq parallèles rencontrent le plan $EFGH$.

1.° Les trois droites AE, CG, IK étant parallèles, & paſſant par une même droite AC, ſeront dans un même plan $ACGE$, & la droite IK coupera les deux droites AC, EG en parties proportionnelles. Ainſi puiſque AC eſt coupée en deux parties égales par la droite IK qui part du centre I du parallélogramme $ABCD$, la droite EG ſera pareillement coupée en deux parties égales par la même droite IK: d'où il ſuit que cette droite IK ſera moyenne arithmétique entre les deux côtés parallèles AE, CG du trapèze $ACGE$, & qu'on aura $2IK = AE + CG$.

2.° Les trois droites BF, DH, IK étant parallèles, & paſſant par une même droite BID, ſeront dans un même plan $BDHF$: & comme la droite IK coupera le côté BD de ce plan en deux parties égales, la même droite IK coupera auſſi le côté FH en deux parties égales, & ſera moyenne arithmétique entre les deux côtés oppoſés BF, DH qui lui ſont parallèles. Ainſi l'on aura $2\,IK = BF + DH$.

Mais nous venons de trouver $2\,IK = AE + CG$.

On aura donc $AE + CG = BF + DH$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 180 & 181.

254. Suppoſons que les quatre parallèles AE, BF, CG, DH ſont perpendiculaires au plan $EFGH$, ce qui ne changera rien à ce qui vient d'être démontré dans le Lemme. Si par le point E où l'une AE de ces perpendiculaires rencontre le plan $EFGH$, on tire les droites EF, EG, EH aux trois points où les autres perpendiculaires rencontrent le même plan; la droite AE qu'on ſuppoſe perpendiculaire au plan $EFGH$, ſera perpendiculaire aux trois droites EF, EG, EH, & ces trois droites ſeront réciproquement perpendiculaires ſur AE.

Par les trois angles B, C, D du parallélogramme A, B, C, D ſoient menées des perpendiculaires BL, CN, DM à la droite AE prolongée indéfiniment vers Z: les trois quadrilatères $EFBL, EGCN, EHDM$ ſeront trois parallélogrammes rectangles dont les côtés oppoſés ſeront parallèles; c'eſt-à-dire qu'on aura $LE = BF, NE = CG, ME = DH$.

Mais nous venons de voir *(n.° 253)* que $AE + CG = BF + DH$.

Donc on aura auſſi $AE + NE = LE + ME$.

C'eſt-à-dire que ſi des angles d'un parallélogramme $ABCD$, l'on mène des perpendiculaires BL, CN, DM vers une même droite AZ tirée par le quatrième angle A de ce parallélogramme, & qu'on prenne ſur cette droite AZ un point E qui ne ſoit pas entre ceux où la même ligne eſt rencontrée par les perpendiculaires BL, CN, DM; la ſomme $AE + NE$ des parties compriſes entre le point E & les deux points A, N qui répondront perpendiculairement aux extrémités de la diagonale AC, ſera égale à la ſomme $LE + ME$ des parties compriſes entre le même point E & les deux points L, M qui répondront perpendiculairement aux extrémités de l'autre diagonale BD du même parallélogramme $ABCD$.

COROLLAIRE II.

255. Puiſque $AE + NE = LE + ME$ dans les deux figures 180 & 181 :

1.° Si l'on retranche AE de chacune des quatre lignes qui compoſent cette égalité, on trouvera $NA = LA + MA$ dans la figure 180, où les trois perpendiculaires BL, CN, DM ſont d'un même côté du point A; c'eſt-à-dire que la partie NA compriſe entre l'angle A & la perpendiculaire menée par l'angle oppoſé C du parallélogramme $ABCD$, ſera égale à la ſomme $LA + MA$ des parties compriſes entre le même angle A & les deux perpendiculaires BL, DM menées par les deux autres angles oppoſés du même parallélogramme. Fig. 180.

2.° Si l'on retranche LE de chacun des termes qui compoſent l'égalité $AE + NE = LE + ME$. Fig. 181.

on trouvera $AL + NL = ML$ dans la figure 181, où le point A & les deux perpendiculaires CN, DM ſont d'un même côté de la perpendiculaire BL.

Fig. 181. 3.° Si l'on retranche AE de chacun des termes de la même égalité $AE + NE = LE + ME$, on aura $NA = LE - AE + MA$ dans la fig. 181, où les trois perpendiculaires BL, CN, DM ne rencontrent point la droite EZ d'un même côté du point A. Mais $LE = AE - LA$. Ainſi $LE - AE = -LA$; & par conſéquent NA ou $LE - AE + MA = MA - LA$. C'eſt-à-dire, que dans le cas où les deux perpendiculaires BL, DM tirées vers la droite EZ par les extrémités de la diagonale BD ne rencontrent point cette droite EZ d'un même côté du point A, la différence $AM - AL$ des parties compriſes entre ces perpendiculaires & le point A, eſt égale à la partie NA compriſe entre le point A & la perpendiculaire CN menée par l'extrémité C de l'autre diagonale AC.

THEOREME.

Fig. 182. **256.** *Tant de puiſſances* P, Q, R, S *qu'on voudra & leur force réſultante étant appliquées à un même point* A *& repréſentées par des parties proportionnelles* AB, AC, AD, AE, AH *de leurs directions; ſi l'on tire par le même point* A *une droite quelconque* ZAe, *& qu'on mène à cette droite des perpendiculaires* Bb, Cc, Dd, Ee, Hh; *la droite* ZAe *ſera coupée par toutes ces perpendiculaires de manière que la partie* Ah *qui répondra à la réſultante* AH *ſera égale à la ſomme* Ab + Ac + Ad *des parties qui répondront aux*

trois puiſſances P, Q, R, *& qui ſeront du même côté que* Ah *par rapport au point* A, *moins la partie* Ae *qui répondra à la puiſſance* S *& qui ſera de l'autre côté du point* A : *c'eſt-à-dire qu'on aura cette égalité*

$Ah = Ab + Ac + Ad - Ae.$

DÉMONSTRATION.

Pour avoir la droite AH qui repréſente la réſultante des puiſſances P, Q, R, S, on a fait un parallélogramme $ABFC$ ſur les lignes AB, AC qui repréſentent les deux puiſſances P, Q; puis ſur la diagonale AF de ce parallélogramme, & ſur la droite AD qui repréſente la puiſſance R, on a conſtruit un ſecond parallélogramme $AFGD$; enfin ſur la diagonale AG de ce ſecond parallélogramme & ſur la droite AE qui exprime la puiſſance S, on a fait un troiſième parallélogramme $AGHE$, & l'on a pris *(n.° 249)* la diagonale de ce dernier parallélogramme pour repréſenter la direction & la quantité de force de la réſultante des puiſſances P, Q, R, S qui ſont toutes appliquées au même point A.

Or 1.° puiſque $AGHE$ eſt un parallélogramme, & que la droite ZAe a été tirée par ſon angle A, les droites Hh, Gg, Ee qu'on mènera par les autres angles de ce parallélogramme à la droite ZAe, diviſeront cette ligne *(n.° 255)* de manière qu'on aura $Ah = Ag - Ae$.

2.° Puiſque $AFGD$ eſt auſſi un parallélogramme, les droites Gg, Ff, Dd qu'on mènera par ſes angles à la droite ZAe, diviſeront auſſi cette ligne de manière qu'on aura *(n.° 255)* $Ag = Af + Ad$: & comme on vient de trouver $Ah = Ag - Ae$, on aura $Ah = Af + Ad - Ae$.

3.° Comme $ABFC$ eſt auſſi un parallélogramme, les droites Ff, Bb, Cc qu'on mènera par ſes angles perpendiculairement à la droite ZAe, diviſeront cette ligne *(n.° 255)* de manière qu'on aura $Af = Ab + Ac$. Mais on vient de voir que $Ah = Af + Ad - Ae$. On aura donc $Ah = Ab + Ac + Ad - Ae$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Fig. 183. 257. Si la droite ZAe qu'on a tirée par le point A, d'où partent les directions de toutes les puiſſances P, Q, R, S, eſt dirigée ſuivant la droite AH qui repréſente la réſultante de toutes ces puiſſances, les perpendiculaires Bb, Cc, Dd, Ee diviſeront la direction de cette réſultante de manière qu'on aura $AH = Ab + Ac + Ad - Ae$. Car la ligne Ah, qui étoit diſtinguée de AH dans la figure précédente, deviendra la réſultante AH dans le cas préſent; & comme on vient de trouver *(n.° 256)* $Ah = Ab + Ac + Ad - Ae$, on aura dans le cas préſent $AH = Ab + Ac + Ad - Ae$.

THE'OREME.

Fig. 184. 258. *Lorſque pluſieurs puiſſances* P, Q, R, S, *repréſentées par des parties* AB, AC, AD, AE *de leurs directions, tirent ou pouſſent un même point* A, *& que par les extrémités* B, C, D, E *de leurs proportionnelles on mène des perpendiculaires* Bb, Cc, Dd, Ee *à la droite* AH *qui repréſente la réſultante de toutes ces puiſſances; ces perpendiculaires diviſent la réſultante* AH *de manière que les parties* Ab, Ac, Ad *priſes du côté de la réſultante, & correſpondantes aux proportionnelles* AB, AC, AD *des puiſſances* P, Q, R,

repréſentent les forces pour leſquelles ces puiſſances contribuent à la réſultante, & que la partie Ae *correſpondante à la puiſſance* S, *& qui eſt dans la direction oppoſée à la réſultante, repréſente la force avec laquelle la puiſſance* S *agit contre la réſultante; en ſorte que la réſultante* AH *des puiſſances* P, Q, R, S *eſt égale à* Ab + Ac + Ad — Ae.

DÉMONSTRATION.

Par le point *A*, d'où partent les directions de toutes les puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S*, ſoient menées perpendiculairement à la réſultante *AH* une droite *AI* dans le plan *AbB*, une droite *AK* dans le plan *AcC*, une droite *AL* dans le plan *AdD*, une droite *AM* dans le plan *AeE*; & ſoient menées vers toutes ces lignes des droites *BI*, *CK*, *DL*, *EM* parallèles à la réſultante *AH*: les quadrilatères *AbBI*, *AcCK*, *AdDL*, *AeEM* ſeront des parallélogrammes rectangles qui auront pour diagonales les droites *AB*, *AC*, *AD*, *AE* par leſquelles les puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S* ſont repréſentées. Ainſi l'on pourra décompoſer chacune de ces puiſſances en deux forces repréſentées par les côtés du parallélogramme rectangle dont elle ſera la diagonale; c'eſt-à-dire que

1.° Au lieu de la puiſſance *P* repréſentée par *AB*, l'on pourra prendre deux forces repréſentées par *Ab*, *AI*.

2.° Au lieu de la puiſſance *Q* repréſentée par *AC*, l'on pourra prendre deux forces repréſentées par *Ac*, *AK*.

3.° Au lieu de la puiſſance *R* repréſentée par *AD*, l'on pourra prendre deux forces exprimées par *Ad*, *AL*.

4.° Enfin au lieu de la puiſſance S repréſentée par AE, l'on pourra prendre deux forces repréſentées par Ae, AM; & l'on pourra toûjours faire la même choſe pour toutes les autres puiſſances, s'il y en a un plus grand nombre dont les directions partent du même point A.

En décompoſant ainſi les puiſſances P, Q, R, S, on aura à leur place deux ſortes de forces; les unes repréſentées par des parties Ab, Ac, Ad, Ae de la direction de la réſultante; les autres repréſentées par les droites AI, AK, AL, AM perpendiculaires à la réſultante.

Les forces repréſentées par Ab, Ac, Ad ayant la même direction que la réſultante, compoſeront une force qui aura la même direction qu'elle, & qui ſera repréſentée par $Ab + Ac + Ad$; & la force repréſentée par Ae étant directement contraire aux trois précédentes, détruira dans la force $Ab + Ac + Ad$ qui en réſulte, une force égale à Ae; en ſorte que le réſultat des quatre forces Ab, Ac, Ad, Ae ſe réduira à une force repréſentée par $Ab + Ac + Ad - Ae$, qui ſera égale à la réſultante AH (*n.° 257*).

Les autres forces repréſentées par AI, AK, AL, AM agiſſant perpendiculairement à la direction de la réſultante, & ne pouvant contribuer en rien pour la former, ſe détruiront néceſſairement. Car ſi elles ne ſe détruiſoient point, & qu'il en réſultât quelque force, cette force combinée ou compoſée avec la réſultante AH formeroit une autre réſultante dont AH ne ſeroit point la direction; ce qui ſeroit contre l'hypothèſe, où l'on ſuppoſe que les quatre puiſſances P, Q, R, S ont une réſultante dirigée ſuivant AH.

On a donc démontré que les puiſſances P, Q, R, S agiſſent

agiſſent pour ou contre la réſultante AH avec des forces repréſentées par Ab, Ac, Ad, Ae, dont les trois premières, qui ont même direction que la réſultante, ſont additives, & dont la dernière qui a une direction oppoſée eſt ſouſtractive; en ſorte que la réſultante AH des puiſſances P, Q, R, S eſt égale à $Ab + Ac + Ad - Ae$. C. Q. F. D.

THEOREME.

259. *Lorſque pluſieurs puiſſances* P, Q, R, S *dirigées dans un même plan, toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors d'un polygone quelconque* ABCDEA, *ſont perpendiculaires & proportionnelles aux côtés de ſuite* AB, BC, CD, DE *de ce polygone, leur réſultante, qui eſt auſſi dirigée dans le même plan, eſt perpendiculaire & proportionnelle à la droite* AE *qui termine les côtés extrêmes de ce polygone.* Fig. 185 & 186.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées les diagonales AC, AD du polygone $ABCDE$.

1.° Les deux puiſſances P, Q étant perpendiculaires & proportionnelles aux deux côtés contigus AB, BC du triangle ABC & dirigées dans le plan de ce triangle, leur réſultante ſera perpendiculaire & proportionnelle au troiſième côté AC du même triangle *(n.° 245)*, & ſera auſſi dirigée dans le même plan; ainſi en nommant X la réſultante de ces deux puiſſances, on aura $P : Q : X :: AB : BC : AC$.

2.° La force X réſultante des deux puiſſances P, Q & la puiſſance R étant perpendiculaires & proportionnelles aux deux côtés AC, CD du triangle ACD & dirigées dans le plan de ce triangle, leur

réſultante qu'on nommera Y, & qui ſera celle des trois puiſſances P, Q, R, ſera perpendiculaire & proportionnelle au troiſième côté AD du même triangle, & ſera encore dirigée dans le plan de ce triangle ou du polygone $ABCDE$; ainſi l'on aura $X : R : Y :: AC : CD : AD$; & par conſéquent $P : Q : R : Y :: AB : BC : CD : AD$.

3.° La force réſultante Y des trois puiſſances P, Q, R & la puiſſance S étant perpendiculaires & proportionnelles aux deux côtés AD, DE du triangle ADE, leur réſultante qu'on nommera Z, & qui ſera celle des quatre puiſſances P, Q, R, S, ſera perpendiculaire & proportionnelle au troiſième côté AE du même triangle, & dirigée dans le plan de ce triangle; ainſi l'on aura $Y : S : Z :: AD : DE : AE$; & par conſéquent $P : Q : R : S : Z :: AB : BC : CD : DE : AE$.

Donc ſi pluſieurs puiſſances P, Q, R, S dirigées dans un même plan, toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors d'un polygone quelconque $ABCDEA$, ſont perpendiculaires & proportionnelles aux côtés de ſuite AB, BC, CD, DE de ce polygone, leur réſultante qui ſe trouvera auſſi dirigée dans le même plan, ſera perpendiculaire & proportionnelle à la droite AE qui terminera les côtés extrêmes du même polygone. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 185 & 186.

260. Si les directions FP, GQ des deux puiſſances P, Q dirigées dans le plan du triangle ABC, ſont perpendiculaires ſur les milieux des côtés AB, BC auxquels ces puiſſances ſont proportionnelles, elles ſe croiſeront (*Géom. n.° 56*) au centre du cercle qui ſeroit circonſcrit au triangle ABC; & la réſultante

qui doit néceſſairement paſſer par le point de concours des deux puiſſances compoſantes, paſſera par le centre de ce cercle : & comme elle ſera perpendiculaire à la droite ou corde AC du même cercle, elle diviſera cette corde en deux parties égales *(Géom. n.° 70)*. Ainſi lorſque deux puiſſances P, Q dirigées dans le plan d'un triangle ABC ſont perpendiculaires ſur les milieux des côtés AB, BC auxquels elles ſont proportionnelles, leur réſultante eſt auſſi perpendiculaire ſur le milieu du côté BC auquel elle eſt proportionnelle.

La réſultante X des deux puiſſances P, Q étant perpendiculaire ſur le milieu de la droite AC par laquelle ſa quantité de force eſt repréſentée ; ſi la puiſſance R, qu'on ſuppoſe proportionnelle à CD, eſt perpendiculaire ſur le milieu de ce côté, la réſultante Y de la force X & de la puiſſance R ou des trois puiſſances P, Q, R ſera par la même raiſon perpendiculaire ſur le milieu de la droite AD par laquelle la quantité de force de cette réſultante ſera repréſentée.

Enfin la réſultante Y des trois puiſſances P, Q, R étant perpendiculaire ſur le milieu de la droite AD à laquelle elle eſt proportionnelle ; ſi la puiſſance S proportionnelle au côté DE eſt perpendiculaire ſur le milieu de ce côté, la réſultante Z de la force Y & de la puiſſance S ſera perpendiculaire ſur le milieu du côté AE par lequel ſa quantité de force ſera repréſentée.

Donc ſi pluſieurs puiſſances P, Q, R, S dirigées dans un même plan, toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors d'un polygone quelconque $ABCDEA$, ſont perpendiculaires ſur les milieux des côtés de ſuite

AB, BC, CD, DE de ce polygone, leur réſultante qui ſera auſſi dirigée dans le même plan ſera perpendiculaire à la droite *AE* qui terminera les proportionnelles extrêmes *AB, DE,* & ſera proportionnelle à cette droite *AE.*

COROLLAIRE II.

Fig. 187. **261.** Si tous les côtés *AB, BC, CD, DE, EL, LM, MA* d'un polygone plan *ABCDELMA* ſont tirés par autant de puiſſances *P, Q, R, S, T, V, X* proportionnelles à ces côtés, dirigées dans le plan de ce polygone toutes vers ſon intérieur ou toutes vers ſon extérieur, & appliquées aux milieux *F, G, H, I, K, N, O* des mêmes côtés, toutes ces puiſſances ſeront en équilibre.

Car ſi l'on diviſe le polygone en deux parties quelconques par une diagonale *AE*, la quantité de force de la réſultante des puiſſances *P, Q, R, S* ſera repréſentée par la droite *AE*, & ſa direction ſera perpendiculaire au milieu de la même droite *(n.° 260)*: & comme la quantité de force de la réſultante des puiſſances *T, V, X* ſera repréſentée par la même droite *AE* & perpendiculaire au milieu de cette droite, il eſt évident que la réſultante des puiſſances *P, Q, R, S* & celle des puiſſances *T, V, X* ſeront égales & directement oppoſées, & ſeront par conſéquent en équilibre.

COROLLAIRE III.

Fig. 188. **262.** Si l'on coupe un priſme perpendiculairement à ſa directrice *af*, par un plan *ABCDEA*, les faces parallélogrammiques *ag, bh, ci, dk, ak* ſeront proportionnelles à leurs ſections *AB, BC, CD, DE,*

EA, & les droites *FP*, *GQ*, *HR*, *IS*, *VZ* qu'on mènera dans le plan de ſection *ABCDEA* perpendiculairement à ſes côtés, ſeront perpendiculaires aux faces *ag*, *bh*, *ci*, *dk*, *ak* du priſme. Mais on vient de voir que des puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S* qui ſeroient appliquées aux droites *FP*, *GQ*, *HR*, *IS*, & qui ſeroient proportionnelles aux côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, auront une réſultante Z perpendiculaire à *AE*, & dont la quantité de force ſera repréſentée par la même droite *AE*. Donc ſi pluſieurs puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S* dirigées dans un même plan de ſection perpendiculaire à la directrice d'un priſme, ſont proportionnelles aux faces du priſme ſur leſquelles elles ſont perpendiculaires; leur force réſultante ſera proportionnelle & perpendiculaire au parallélogramme *ak* qui terminera les faces *ag*, *dk* auxquelles les puiſſances extrêmes *P*, *S* ſeront perpendiculaires & proportionnelles.

COROLLAIRE IV.

263. Si le priſme *abcdefghik* eſt droit & coupé au milieu de ſa longueur par le plan *ABCDEA*, les milieux *F*, *G*, *H*, *I*, *V* des côtés de ce plan ſeront les centres des faces parallélogrammiques *ag*, *bh*, *ci*, *dk*, *ak* du priſme, & les droites *FP*, *GQ*, *HR*, *IS*, *VZ* perpendiculaires à ces faces ſeront dans le plan *ABCDEA* & perpendiculaires à ſes côtés. Mais on vient de voir que des puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S* dirigées dans le plan *ABCDEA* perpendiculairement ſur les milieux de ſes côtés, & qui ſeront proportionnelles aux mêmes côtés, auront une réſultante proportionnelle à *AE* & perpendiculaire au milieu de cette ligne. Donc ſi pluſieurs puiſſances *P*, *Q*, *R*, *S* ſont proportionnelles aux faces parallélogrammiques Fig. 188.

ag, bh, ci, dk d'un priſme droit, & dirigées perpendiculairement ſur les milieux de ces faces, leur réſultante ſera proportionnelle à l'aire du parallélogramme *ak* & dirigée perpendiculairement au centre *V* de ce parallélogramme.

COROLLAIRE V.

Fig. 189. 264. Lorſque toutes les faces *ag, bh, ci, dk, en, lo, mf* d'un priſme droit ſont pouſſées ou tirées perpendiculairement toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors du priſme par des puiſſances *P, Q, R, S, T, V, X* proportionnelles à leurs étendues & appliquées à leurs centres; ſi l'on diviſe ce priſme par un plan diagonal *ak* qui ſera néceſſairement un parallélogramme rectangle, la réſultante des puiſſances *P, Q, R, S* ſera proportionnelle au parallélogramme *ak*, & ſera dirigée perpendiculairement au centre de ce parallélogramme *(n.° 263)*: & comme la réſultante des puiſſances *T, V, X* ſera auſſi proportionnelle au parallélogramme *ak*, & ſera dirigée perpendiculairement à ſon centre, elle ſera égale & directement oppoſée à la réſultante des puiſſances *P, Q, R, S*. Ainſi ces deux réſultantes ſe détruiront mutuellement; & par conſéquent les puiſſances *P, Q, R, S, T, V, X*, qu'on ſuppoſe dirigées toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors du priſme droit, ſeront en équilibre.

COROLLAIRE VI.

265. En faiſant attention à la démonſtration du Théorème & de ſes Corollaires, on reconnoîtra aiſément que ſi le nombre des côtés du polygone ou le nombre des faces parallélogrammiques du priſme droit étoit plus grand & devenoit même infiniment

plus grand qu'on ne l'a exprimé dans la figure, tout ce qu'on vient de démontrer auroit encore lieu; c'eſt-à-dire que

1.° Si toutes les parties d'une ligne courbe *ABCDE* décrite dans un plan, ou ſi toutes les parties d'une ſurface courbe engendrée par la courbe *ABCDE* mûe parallèlement à ſa première poſition le long d'une directrice *AF* perpendiculaire au plan de cette courbe, ſont tirées ou pouſſées toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors par une infinité de puiſſances perpendiculaires & proportionnelles à ces parties; la réſultante de toutes ces forces ſera proportionnelle à la corde *AE* de cette courbe ou au rectangle *AFGE* décrit par cette corde, & ſera perpendiculaire ſur le milieu de cette corde ou ſur le centre du rectangle *AFGE*. Car on peut toûjours ſuppoſer que des forces appliquées à des parties infiniment petites ſont appliquées aux milieux de ces parties. Fig. 190 & 191.

2.° Lorſque toutes les parties d'une ligne courbe *ABCDELMA*, ou toutes les parties d'une ſurface courbe engendrée par le contour *ABCDELMA* d'un plan mû parallèlement à ſa première poſition le long d'une directrice *AF* qui lui eſt perpendiculaire, ſont pouſſées ou tirées toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors par une infinité de forces perpendiculaires & proportionnelles aux grandeurs de ces parties; toutes ces puiſſances ſont en équilibre. Car ſi l'on coupe le plan *ABCDELMA* par une droite quelconque *AE*, & le ſolide que ce plan engendre par un parallélogramme *FAEG*, toutes les puiſſances appliquées à la portion de courbe *ABCDE* ou à la portion de ſurface courbe *FABCDEG* auront une

réſultante proportionnelle à la droite *AE* ou au parallélogramme *FAEG;* & la direction de cette réſultante ſera perpendiculaire ſur le milieu de cette corde ou de ce parallélogramme : & comme la réſultante de toutes les forces appliquées à l'autre portion de courbe *AMLE* ou à l'autre portion de ſurface courbe *FAMLEG* ſera auſſi proportionnelle à la droite *AE* ou au rectangle *FE,* & aura une direction perpendiculaire ſur le milieu de cette droite ou de ce rectangle, toutes les forces appliquées au contour de la courbe ou de la ſurface courbe ſe réduiront à deux réſultantes égales & directement oppoſées qui ſe détruiront mutuellement.

THEOREME.

Fig. 192. **266.** *Si par les extrémités* C, D *& le milieu* L *d'un côté ou d'une portion* CD *de côté quelconque d'un polygone* ABCDE, *l'on mène dans le plan de ce polygone des perpendiculaires* CH, DK, LI *à une même droite* AG, *& que l'on tire* CF *parallèlement à* AG; *une puiſſance* P *qui ſera dirigée dans le plan de ce polygone perpendiculairement ſur le milieu de* CD, *& dont la quantité de force ſera repréſentée par* CD × LI, *pourra ſe décompoſer en deux forces, l'une perpendiculaire & l'autre parallèle à* AG. *La quantité de force perpendiculaire à* AG *ſera repréſentée par l'aire du trapèze* HCDK, *& la quantité de force parallèle à* AG *ſera exprimée par* FD × LI.

DÉMONSTRATION.

Ayant tiré *LN* parallèlement à *AG,* & pris une partie *LO* de la direction de la puiſſance *P* pour repréſenter cette puiſſance, ſoient menées par le

point O les droites OM, ON parallèlement aux deux lignes AG, LI. La puiſſance P repréſentée par la diagonale LO du parallélogramme rectangle $LMON$ pourra *(n.° 227)* ſe décompoſer en deux forces Q, R qui ſeront repréſentées par les côtés contigus LM, LN du même parallélogramme; c'eſt-à-dire que l'on aura $P : Q : R :: LO : LM : LN$ ou $:: LO : LM : MO$.

Mais les deux triangles LMO, CFD ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, ſeront ſemblables & donneront $LO : LM : MO :: CD : CF : FD$. Ainſi l'on aura $P : Q : R :: CD : CF : FD$ ou $:: CD \times LI : CF \times LI : FD \times LI$.

Donc ſi la puiſſance P appliquée perpendiculairement au milieu de CD eſt exprimée par $CD \times LI$, comme on le ſuppoſe dans l'énoncé du Théorème, la force Q qui en réſultera ſuivant LI perpendiculairement à AG ſera exprimée par $CF \times LI$, c'eſt-à-dire, par l'aire du trapèze $HCDK$; & la force R qui en réſultera parallèlement à AG ſera repréſentée par $FD \times LI$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

267. Un polygone $ABCDEdcba$ étant terminé par une droite Aa; ſoient tirées par les extrémités C, D & par le milieu L d'un côté CD des parallèles Cc, Dd, Ll à la droite Aa, & par les points où ces parallèles rencontreront le contour du polygone ſoient menées des perpendiculaires CH, DK, LI, ch, dk, li à la même droite Aa. Cela poſé, ſi l'on applique dans le plan de ce polygone perpendiculairement aux milieux des deux droites CD, cd des forces dirigées Fig. 193.

toutes deux vers le dedans ou toutes deux vers le dehors du polygone, dont les quantités ſoient repréſentées par $CD \times LI$, $cd \times li$, & qu'on décompoſe chacune de ces forces en deux autres dont l'une ſoit perpendiculaire & l'autre parallèle à Aa; les forces perpendiculaires à Aa ſeront repréſentées par les trapèzes $HCDK$, $hcdk$, & les forces contraires parallèles à Aa ſeront *(n.° 268)* repréſentées par $FD \times LI$, $fd \times li$.

Mais les droites FD, fd étant parallèles & compriſes entre les parallèles Cc, Dd ſeront égales, & les parallèles LI, li compriſes entre les parallèles Ll, Aa ſeront auſſi égales; & par conſéquent les deux quantités $FD \times LI$, $fd \times li$ ou les deux forces oppoſées parallèles à Aa qu'elles repréſenteront, ſeront égales. Ainſi ces deux forces ſe détruiront mutuellement; & des deux forces appliquées perpendiculairement aux milieux des deux côtés correſpondans CD, cd, il ne reſtera que deux forces dirigées ſuivant LI, li perpendiculairement à Aa, dont les quantités ſeront repréſentées par les deux trapèzes $HCDK$, $hcdk$.

Si l'on tire encore Bb parallèle à Aa, & qu'on applique dans le plan du polygone perpendiculairement aux milieux des côtés correſpondans BC, bc des forces dirigées toutes deux vers le dedans ou toutes deux vers le dehors du polygone, & dont les quantités ſoient repréſentées par les produits de ces côtés multipliés par les diſtances de leurs milieux à la droite Aa; chacune de ces forces ſe décompoſera en deux autres, dont l'une ſera perpendiculaire & l'autre parallèle à Aa. Les forces contraires parallèles à Aa ſe détruiront mutuellement, & les valeurs des

deux qui reſteront ſeront repréſentées par les trapèzes *MBCH, mbch.*

Donc ſi l'on diviſe le polygone *ABCDEdcba* par une infinité de lignes droites parallèles à *Aa*, & qu'au milieu de chaque côté compris entre deux parallèles, on applique une force dont la quantité ſoit repréſentée par le produit de ce côté multiplié par la diſtance de ſon milieu à la droite *Aa*, il ne réſultera de toutes ces forces, qu'on ſuppoſe dirigées toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors du polygone, que des forces perpendiculaires à *Aa*, dont la ſomme ſera repréſentée par l'aire du polygone *ABCDEdcba*: en ſorte que la réſultante de toutes les forces appliquées à tous les côtés du polygone paſſera par ſon centre de gravité, ſera perpendiculaire à *Aa*, & ſera repréſentée quant à ſa quantité de force par l'aire de ce polygone.

COROLLAIRE II.

268. Imaginons maintenant que le polygone *ABCDEdcba* eſt la ſection d'un priſme coupé par le milieu perpendiculairement à ſa longueur. Toutes les forces appliquées dans le plan du polygone *ABCDEdcba* perpendiculairement aux milieux des côtés *AB, BC, CD, DE, &c.* & proportionnelles aux produits de ces côtés multipliés chacun par la diſtance de ſon milieu à la droite *Aa*, ſe trouveront perpendiculaires ſur les milieux de toutes les faces parallélogrammiques du priſme droit, & proportionnelles aux produits de ces faces multipliées chacune par la diſtance de ſon centre au plan dont la droite *Aa* eſt le profil. Fig. 193.

Le centre de gravité de la ſection *ABCDEdcba*

du prisme sera celui de ce prisme, & la ligne tirée par le centre de gravité de cette section perpendiculairement sur la droite *Aa* sera une perpendiculaire menée du centre de gravité du prisme sur le plan dont *Aa* est le profil ; en sorte que la résultante de toutes les forces appliquées perpendiculairement aux milieux des côtés *AB, BC, CD, DE, &c.* de la section *ABCDEdcba*, ou perpendiculairement aux milieux des faces parallélogrammiques du prisme, sera une force dirigée du centre de gravité de ce prisme perpendiculairement vers le plan dont *Aa* est la section.

Enfin la quantité de force de la résultante de toutes les puissances appliquées perpendiculairement aux milieux des côtés *AB, BC, CD, DE, &c.* étant représentée par l'aire du polygone *ABCDEdcba*, lorsque chacune des forces particulières appliquées à ces côtés est représentée par le produit du côté sur lequel elle agit, multiplié par la distance du milieu de ce côté à la droite *Aa;* il est clair que la résultante de toutes les forces appliquées perpendiculairement aux centres des faces parallélogrammiques d'un prisme sera représentée par le solide de ce prisme, lorsque toutes les forces particulières appliquées à ses faces seront proportionnelles aux produits des mêmes faces multipliées par les distances de leurs milieux au plan dont *Aa* est la coupe.

THEOREME.

Fig. 194. 269. *Lorsqu'une puissance* P *tire ou pousse perpendiculairement le plan d'un trapèze* ABCD *compris entre deux plans parallèles* AIKD, NBCO, *& coupé*

dans le milieu de ſa longueur ſuivant une ligne GH *parallèle à ſes côtés* AD, BC, *par un plan* ILMK *perpendiculaire aux deux plans parallèles* AIKD, NBCO: *ſi par les côtés* AB, DC, AD *du trapèze* ABCD *l'on mène encore perpendiculairement au plan* NBCO *trois plans* ANB, DOC, ANOD, *en ſorte que tous ces plans ſe terminent mutuellement, & que le trapèze* NBCO *ſoit la projection du trapèze* ABCD, *on pourra décompoſer la puiſſance* P *en deux forces* Q, R, *l'une perpendiculaire au plan de projection* NBCO, *l'autre perpendiculaire au plan* ILMK: *& ſi la quantité de force de la puiſſance* P *eſt repréſentée par l'aire du trapèze* ABCD *auquel elle eſt appliquée perpendiculairement, la force* Q *qui en réſultera perpendiculairement au plan* NBCO *ſera repréſentée par l'aire de ce plan, & l'autre force* R *qui ſe trouvera perpendiculaire au plan* ILMK *ſera repréſentée par l'aire de ce plan.*

DÉMONSTRATION.

Par le point *V* où la puiſſance *P* eſt appliquée perpendiculairement au plan du trapèze *ABCD*, ſoit imaginé un plan *EFT* auquel les parallèles *BC*, *GH*, *AD* ſoient perpendiculaires : les quatre plans *ABCD*, *NBCO*, *ANOD*, *ILMK* qui paſſeront par ces trois lignes ſeront perpendiculaires au plan *EFT*, & ce plan *EFT* ſera réciproquement perpendiculaire ſur les quatre plans *ABCD*, *NBCO*, *ANOD*, *ILMK*. Ainſi les directions *VP*, *VQ*, *VR* de la puiſſance *P* & des deux forces *Q*, *R* dans leſquelles on doit décompoſer cette puiſſance, étant ſuppoſées perpendiculaires aux trois plans *ABCD*, *NBCO*, *ILMK*, ſeront dans ce plan *EFT* &

perpendiculaires à ſes trois côtés *EF, FT, ET:* en ſorte que ſi l'on conſidère la puiſſance *P* comme la réſultante des deux forces *Q, R,* on aura *(n.° 233)* $P : Q : R :: EF : FT : ET$ & par conſéquent $:: EF \times GH : FT \times GH : ET \times GH$. Le Théorème ſera donc démontré, ſi l'on fait voir que les trois quadrilatères *ABCD, NBCO, ILMK* ſont égaux aux trois produits $EF \times GH$, $FT \times GH$, $ET \times GH$.

Puiſque les quatre plans *ABCD, NBCO, ANOD, ILMK* ſont perpendiculaires au plan *EFT,* les droites *BC, GH, AD, LM, NO* dans leſquelles ils ſe rencontrent, ſont auſſi perpendiculaires à ce plan *(Géom. n.° 423)* & par conſéquent parallèles entr'elles. Donc 1.° les deux côtés oppoſés *BC, AD* du trapèze *ABCD* ſont perpendiculaires au côté *EF* du triangle *EFT,* & ce côté *EF* eſt la hauteur de ce trapèze; & comme la droite *GH* menée parallèlement aux côtés oppoſés *AD, BC* du trapèze *ABCD* par le milieu de ſa hauteur *EF,* eſt ſa largeur moyenne, l'aire de ce trapèze eſt égale au produit $EF \times GH$. 2.° Les côtés *BC, NO* du trapèze *NBCO* ſont perpendiculaires au côté *FT* du plan *EFT,* & par conſéquent *FT* eſt la hauteur de ce trapèze.

Les plans *ILMK, ANOD* menés par les deux parallèles *GH, AD* perpendiculairement ſur le plan *NBCO,* ſont parallèles, & les longueurs des deux trapèzes *ABCD, NBCO* ſont coupées proportionnellement par le plan *ILMK;* ainſi puiſque *GH* coupe le trapèze *ABCD* dans le milieu de ſa longueur, la droite *LM* parallèle aux deux droites *BC, NO,* coupe auſſi le trapèze *NBCO* dans le milieu de ſa longueur, & eſt ſa largeur moyenne. Donc

l'aire de ce trapèze, qui eſt le produit de ſa hauteur & de ſa largeur moyenne, eſt égale au produit $FT \times LM$.

Enfin les cinq plans $ILMK$, $ANOD$, ANB, DOC, ETF étant tous compris entre les mêmes plans parallèles $AIKD$, $NBCO$, & perpendiculaires à ces derniers plans, les droites IL, KM, ET dans leſquelles ils ſe coupent ſont égales, perpendiculaires au même plan $NBCO$, & par conſéquent parallèles. Donc 1.° les deux droites GH, LM compriſes entre les parallèles IL, KM ſont égales; & puiſque l'aire du trapèze $NBCO$ eſt égale au produit $FT \times LM$, elle eſt auſſi égale au produit $FT \times GH$. 2.° Le quadrilatère $ILMK$ eſt un parallélogramme rectangle, dont l'aire eſt égale au produit $KM \times LM$, ou au produit $ET \times GH$; puiſqu'on vient de voir que $KM = ET$ & $LM = GH$.

Il eſt donc démontré que les ſurfaces des trois quadrilatères $ABCD$, $NBCO$, $ILMK$ ſont égales aux trois produits $EF \times GH$, $FT \times GH$, $ET \times GH$. Ainſi puiſqu'on vient de trouver que $P : Q : R :: EF \times GH : FT \times GH : ET \times GH$, on aura auſſi $P : Q : R :: ABCD : NBCO : ILMK$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

270. Comme le côté AD du trapèze $ABCD$ peut être ſuppoſé auſſi petit qu'on voudra, ſans qu'il arrive aucun changement aux rapports qu'on vient de démontrer entre la puiſſance P & les deux forces Q, R dans leſquelles elle a été décompoſée : lorſque ce côté AD ſera nul, c'eſt-à-dire, lorſque le trapèze $ABCD$ deviendra un triangle BAC dont la pro- Fig. 194.

jection ſera un triangle *NBC*, & que le rectangle *ILMK* ſera réduit à un autre rectangle *ILmk* dont la baſe *Lm* ſera la moitié de celle *BC* du triangle *BAC*, on aura $P : Q : R :: BAC : BNC : ILmk$.

COROLLAIRE II.

Fig. 194. **271.** La projection *NBCO* de la figure *ABCD* étant déterminée par des perpendiculaires tirées de tous les points de cette figure ſur le plan *BO*, il eſt aiſé de voir que ſi le point *V* eſt le centre de gravité de la figure *ABCD*, la droite *VS* menée de ce point perpendiculairement ſur le plan *BO*, déterminera ſur ce plan un point *S* qui ſera le centre de gravité de la projection *NBCO*.

Donc ſi la puiſſance *P*, dont la quantité de force eſt repréſentée par l'aire du trapèze *ABCD*, eſt appliquée perpendiculairement au centre de gravité *V* de ce trapèze, & qu'on la décompoſe en deux forces *Q*, *R* dont les directions *VQ*, *VR* ſoient perpendiculaires, l'une au plan de projection *NBCO*, & l'autre au plan *ILMK*; la direction de la force *Q* dont la quantité ſera repréſentée par l'aire de la projection *NBCO*, paſſera néceſſairement par le centre de gravité *S* de cette projection.

COROLLAIRE III.

Fig. 194. **272.** Si la hauteur *EF* du trapèze *ABCD* devient infiniment petite, on pourra regarder ce trapèze comme un parallélogramme dont le centre de gravité *V* ſera au milieu de la droite *GH* qui diviſera ce parallélogramme en deux parties égales: & comme le milieu de la droite *GH* ſera auſſi le centre de gravité du parallélogramme *ILMK*, la puiſſance

puiſſance *P* appliquée perpendiculairement au centre de gravité *V* du plan *ABCD* ſe décompoſera en deux forces *Q*, *R* dont les directions paſſeront par les centres de gravité des deux plans *NBCO*, *ILMK*, & ſeront perpendiculaires à ces plans.

COROLLAIRE IV.

273. Imaginons une tranche ſolide infiniment mince compriſe entre des plans parallèles *ABCDEA*, *LMNOPL*, & terminée latéralement par des trapèzes *ALMB*, *BMNC*, *CNOD*, *DOPE*, *EPLA*. Si l'on coupe cette tranche ſuivant ſes arrêtes *LA*, *MB*, *NC*, *OD*, *PE*, *LM*, *MN*, *NO*, *OP*, *PL* par des plans *ALF*, *BMG*, *CNH*, *DOI*, *EPK*, *LFGM*, *MGHN*, *NHIO*, *OIKP*, *PKFL* perpendiculairement au plan *ABCDEA*, pour avoir ſur ce plan les projections *FABG*, *GBCH*, *HCDI*, *IDEK*, *KEAF* qui répondent perpendiculairement aux talus ou trapèzes latéraux de la tranche ſolide; & ſi, après avoir refendu cette tranche ſolide par un plan *abcdea* conduit parallèlement à ſes baſes oppoſées parallèles, à diſtances égales de ces baſes, l'on mène par les ſections *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea* des trapèzes, & perpendiculairement à la baſe *ABCDEA*, des plans *XQRY*, *YRSZ*, *ZSTW*, *WTV&*, *&VQX* qui ſoient terminés par les baſes parallèles de la tranche ſolide, afin d'avoir un priſme droit compris entre des baſes parallèles *QRSTVQ*, *XYZW&X*: il ſuit du Théorème qu'on vient de démontrer & de ſon Corollaire III, que lorſqu'on appliquera perpendiculairement aux centres de gravité des talus ou trapèzes latéraux *ALMB*, *BMNC*, *CNOD*, *DOPE*, *EPLA* des puiſſances proportionnelles à Fig. 195.

ces trapèzes ou repréſentées par leurs aires, ces puiſſances ſe décompoſeront en deux ſortes de forces, les unes perpendiculaires au plan *ABCDEA*, qui ſeront repréſentées par les projections *FABG, GBCH, HCDI, IDEK, KEAF*, & dont les directions paſſeront par les centres de gravité de ces projections; les autres perpendiculaires aux rectangles *XQRY, YRSZ, ZSTW, WTV&, &VQX*, qui ſeront repréſentées par les aires de ces rectangles, & qui paſſeront par leurs centres de gravité.

Toutes les forces perpendiculaires aux rectangles *XQRY, YRSZ, ZSTW, WTV&, &VQX* étant proportionnelles à ces rectangles qui ſont tous de même hauteur, ſeront auſſi proportionnelles à leurs baſes ou à leurs largeurs *ab, bc, cd, de, ea:* & comme elles ſont appliquées aux centres de gravité de ces rectangles, elles ſeront appliquées aux milieux des lignes *ab, bc, cd, de, ea* qui ſont à diſtances égales des deux plans parallèles qui terminent ces rectangles. Donc *(n.° 264)* toutes ces forces ſe détruiront mutuellement.

Ainſi de toutes les forces appliquées aux talus ou trapèzes latéraux de la tranche ſolide, il ne reſtera que des forces dont les quantités ſeront repréſentées par les projections *FABG, GBCH, HCDI, IDEK, KEAF* de ces trapèzes, & dont les directions rencontreront perpendiculairement les centres de gravité des mêmes projections.

COROLLAIRE V.

Fig. 195. **274.** Mais toutes les forces dirigées perpendiculairement vers les centres de gravité des trapèzes *FABG, GBCH, HCDI, IDEK, KEAF* &

repréſentées par les aires de ces trapèzes, étant parallèles, il n'en réſultera qu'une ſeule force dont la quantité ſera repréſentée par la ſomme des mêmes trapèzes, & dont la direction paſſera par le centre de gravité du ſyſtème de tous ces trapèzes.

Comme on peut ſuppoſer que tous les ſolides ſont diviſés en tranches parallèles infiniment minces, & que les talus ou trapèzes latéraux de ces lames compoſent les ſurfaces de ces ſolides : il eſt évident que ſi l'on applique perpendiculairement aux centres de gravité de toutes les parties de la ſurface d'un ſolide terminé par un plan, des puiſſances proportionnelles à ces parties, toutes ces puiſſances ſe décompoſeront en deux ſortes de forces, les unes parallèles au plan qui terminera le ſolide, & qui ſe détruiront mutuellement; les autres perpendiculaires au même plan, & dont la ſomme ſera repréſentée par l'aire de ce plan, ſi les plans qui lui ſeront menés perpendiculairement par les arrêtes du ſolide, tombent tous au dedans de ſa ſurface; en ſorte qu'il ne réſultera à ce corps qu'une ſeule force dont la quantité ſera repréſentée par l'aire du plan qui le terminera, & dont la direction, qui ſera perpendiculaire au même plan, paſſera par ſon centre de gravité.

COROLLAIRE VI.

275. Lorſqu'une tranche infiniment mince de ſolide eſt compriſe entre deux plans *ABCDEA*, *LMNOPL* parallèles à un même plan *abcdea*, & que, par des perpendiculaires menées de tous les points des talus ou trapèzes latéraux de cette lame ſur le plan *abcdea*, on a projeté tous ces talus ſur ce plan; ſi des centres de gravité *Q*, *R*, *S*, *T*, *V* de Fig. 196.

tous les trapèzes latéraux de la même lame, on mène encore des perpendiculaires Qq, Rr, Ss, Tt, Vu sur le plan de projection, toutes ces perpendiculaires seront égales à cause de l'épaisseur infiniment petite de la lame; & les points q, r, s, t, u, où elles rencontreront les projections des talus latéraux, seront les centres de gravité de ces projections. Or comme on pourra supposer que chaque solide tel que $ABMLabml$ compris entre un trapèze & sa projection, est engendré par toutes les parties de cette projection mûes suivant des parallèles à qQ, & que pendant ce mouvement le centre de gravité q du plan générateur $abml$ décrira la droite qQ; il est évident que le solide $ABMLabml$ sera égal au produit $abml \times qQ$, & que les autres solides $BCNMbcnm$, $CDONcdon$, $DEPOdepo$, $EALPealp$ compris entre les autres trapèzes & leurs projections, seront par la même raison égaux aux produits $bcnm \times rR$, $cdon \times sS$, $depo \times tT$, $ealp \times uV$. Ainsi puisque toutes les lignes qQ, rR, sS, tT, uV sont égales, les solides compris entre les trapèzes latéraux & leurs projections seront proportionnels à ces projections.

Cela posé, si l'on applique perpendiculairement aux centres de gravité des trapèzes $ABML$, $BCNM$, $CDON$, $DEPO$, $EALP$ des puissances Q, R, S, T, V exprimées par $ABML \times qQ$, $BCNM \times rR$, $CDON \times sS$, $DEPO \times tT$, $EALP \times uV$ ces puissances se décomposeront en deux sortes de forces, les unes parallèles au plan $abcdea$, qui se détruiront mutuellement; les autres dirigées perpendiculairement vers les centres de gravité des projections $abml$, $bcnm$, $cdon$, $depo$, $ealp$, dont les quantités seront représentées par les produits $abml \times qQ$,

bcnm × *rR*, *cdon* × *sS*, *depo* × *tT*, *ealp* × *uV*, c'eſt-à-dire, par les ſolides *ABMLabml*, *BCNMbcnm*, *CDONcdon*, *DEPOdepo*, *EALPealp*.

Les lignes *qQ*, *rR*, *sS*, *tT*, *uV* étant égales, & les puiſſances *Q*, *R*, *S*, *T*, *V* étant repréſentées par les produits *ABML* × *qQ*, *BCNM* × *rR*, *CDON* × *sS*, *DEPO* × *tT*, *EALP* × *uV*; ces puiſſances ſeront proportionnelles aux trapèzes *ABML*, *BCNM*, *CDON*, *DEPO*, *EALP*: ainſi *(n.° 273)* les forces qui en réſulteront parallèlement au plan *abcdea* ſe détruiront mutuellement, & les puiſſances appliquées aux trapèzes latéraux ſe réduiront à des forces dirigées perpendiculairement vers les centres de gravité *q*, *r*, *s*, *t*, *u* de leurs projections.

Si les puiſſances *Q*, *R*, *S*, *T*, *V* étoient repréſentées par les aires des trapèzes auxquels elles ſont appliquées, les forces qui en réſulteroient perpendiculairement aux centres de gravité *q*, *r*, *s*, *t*, *u* des projections de ces trapèzes, & que nous nommerons auſſi *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, ſeroient repréſentées par les aires de ces projections *(n.° 269)*; c'eſt-à-dire qu'on auroit

Q : *q* :: *ABML* : *abml* ou :: *ABML* × *qQ* : *abml* × *qQ*
R : *r* :: *BCNM* : *bcnm* ou :: *BCNM* × *rR* : *bcnm* × *rR*
S : *s* :: *CDON* : *cdon* ou :: *CDON* × *sS* : *cdon* × *sS*
T : *t* :: *DEPO* : *depo* ou :: *DEPO* × *tT* : *depo* × *tT*
V : *u* :: *EALP* : *ealp* ou :: *EALP* × *uV* : *ealp* × *uV*.

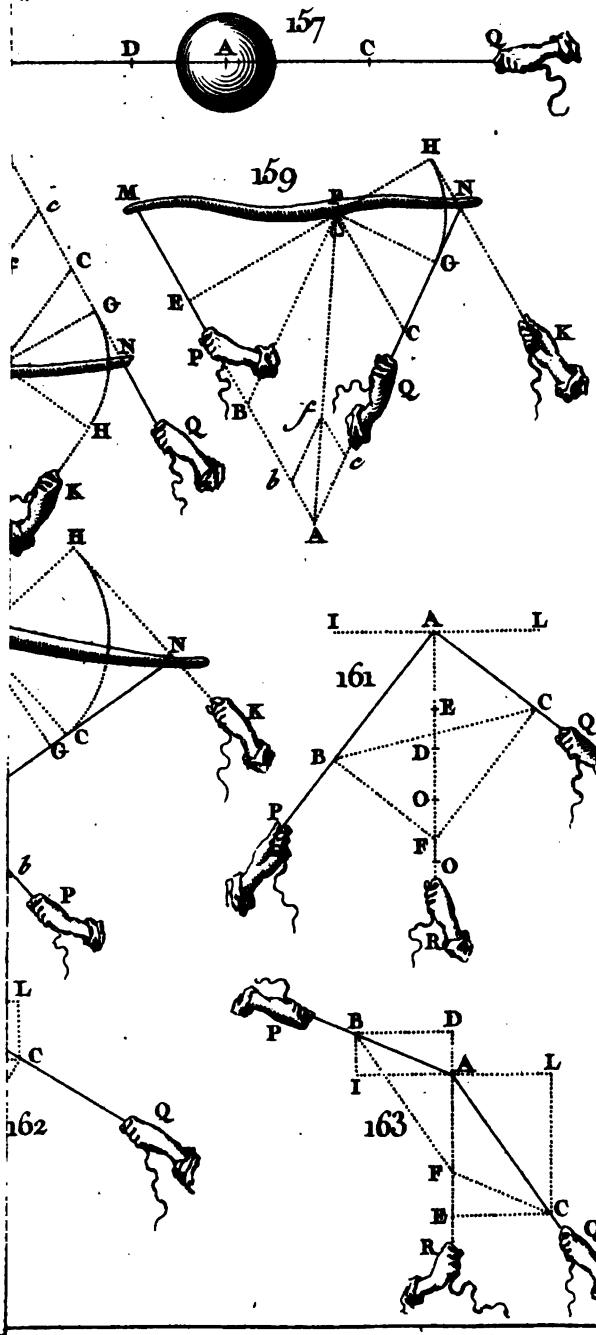
Mais on a ſuppoſé que les puiſſances *Q*, *R*, *S*, *T*, *V* ſont véritablement repréſentées par les produits *ABML* × *qQ*, *BCNM* × *rR*, *CDON* × *sS*, *DEPO* × *tT*, *EALP* × *uV*.

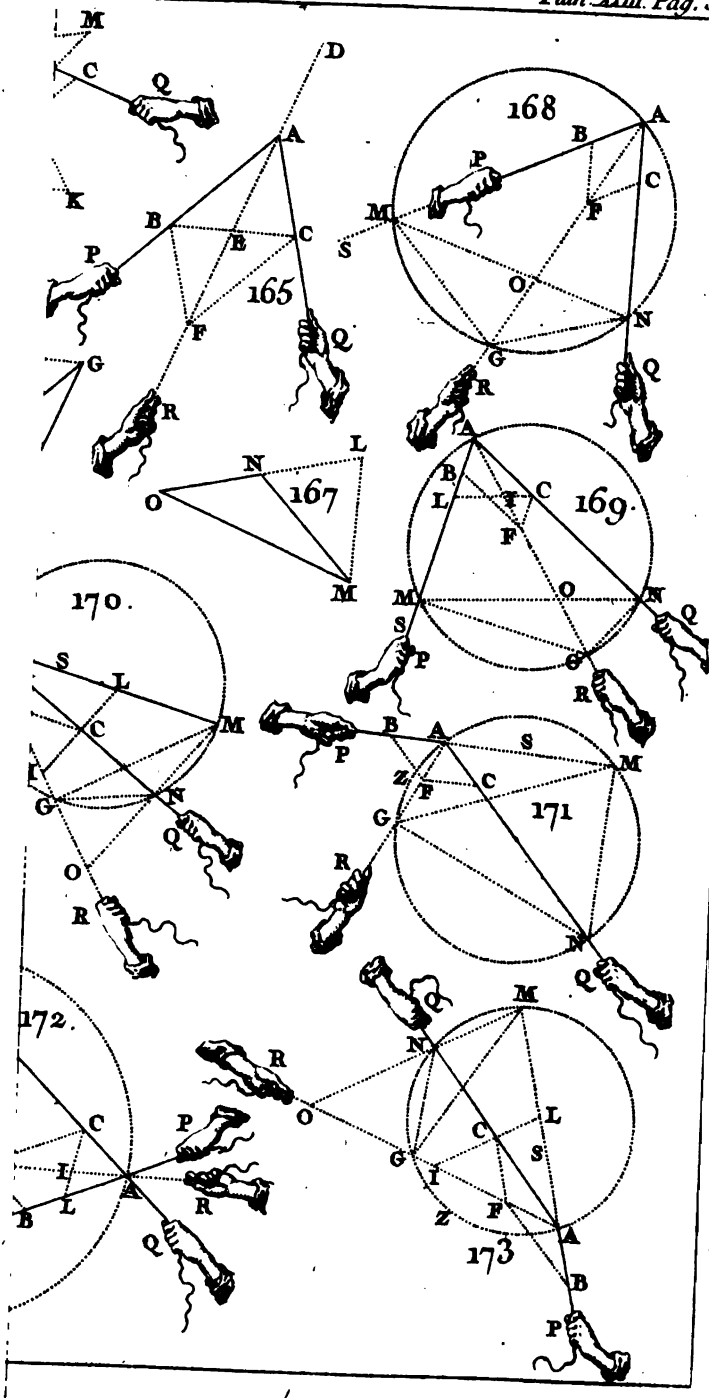
Donc les forces *q*, *r*, *s*, *t*, *u* qui en réſultent perpendiculairement aux centres de gravité des projections, ſont repréſentées par les produits *abml* × *qQ*,

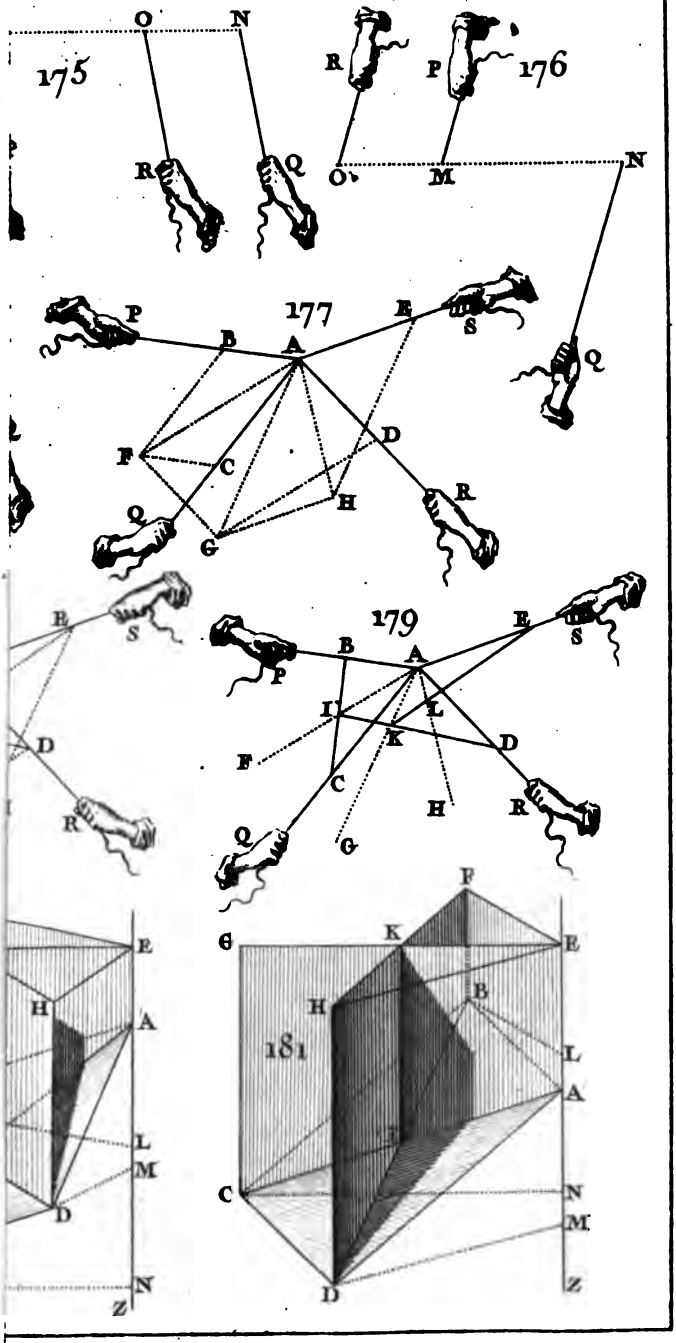
bcnm × *rR*, *cdon* × *sS*, *depo* × *tT*, *ealp* × *uV*, c'eſt-à-dire, par les ſolides *ABMLabml*, *BCNMbcnm*, *CDONcdon*, *DEPOdepo*, *EALPealp*.

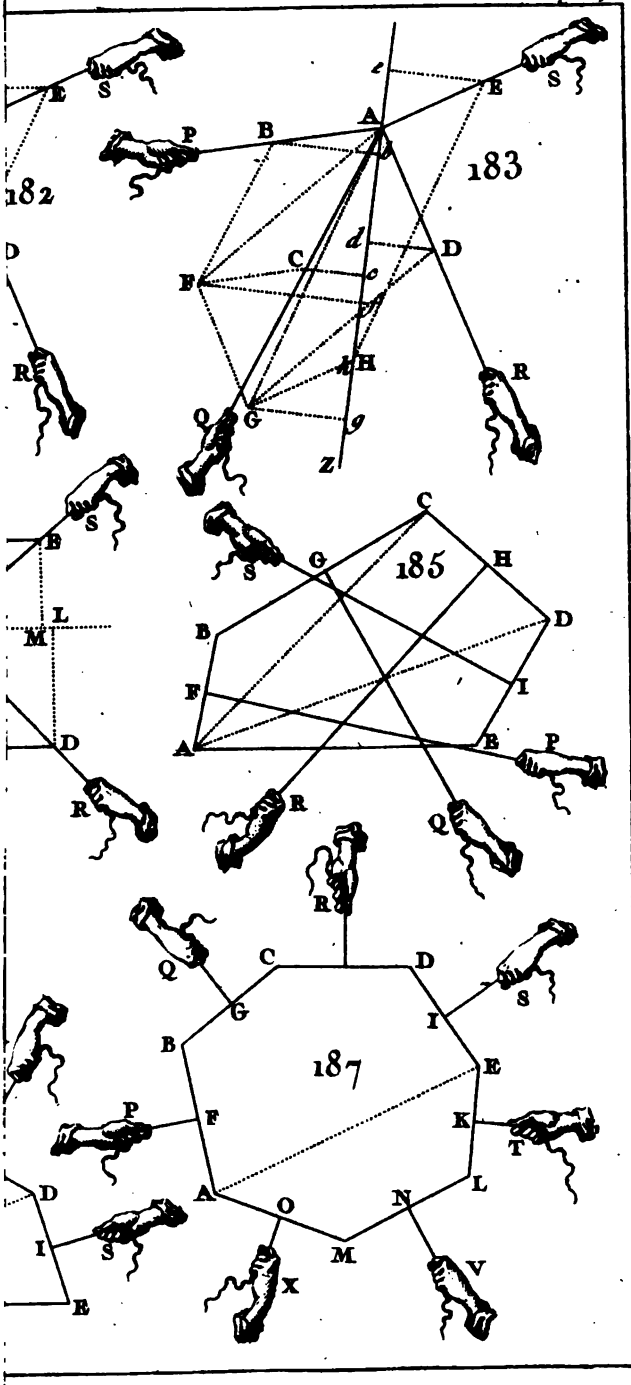
Et comme les lignes *qQ*, *rR*, *sS*, *tT*, *uV* qui paſſent par les centres de gravité des faces oppoſées de ces ſolides, paſſeront auſſi par les centres de gravité des mêmes ſolides, à cauſe que les trapèzes latéraux de la lame que l'on conſidère ſont infiniment étroits; il eſt évident que la force qui réſultera de toutes les forces *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, paſſera par le centre de gravité du ſyſtème de tous les ſolides qui ſeront compris entre les trapèzes latéraux de la lame que l'on conſidère & leurs projections; en ſorte que pour contrebalancer toutes les forces *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, il faudra employer une force repréſentée par la ſomme des mêmes ſolides, dont la direction paſſe par le centre de gravité du ſyſtème de tous ces ſolides, & ſoit perpendiculaire au plan de projection *abcdea*.

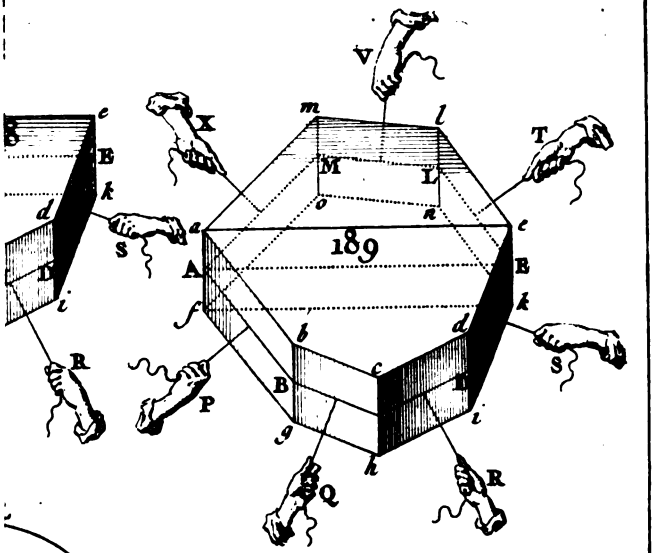
Comme on démontrera la même choſe ſur toutes les autres tranches d'un ſolide, on peut conclurre que ſi toutes les parties de la ſurface d'un ſegment de ſolide coupé ou terminé par un plan, ſont pouſſées avec des forces dirigées perpendiculairement aux centres de gravité de ces parties, & repréſentées par les produits faits de ces parties multipliées par leurs diſtances à un même plan; toutes ces forces ſe réduiront à une ſeule qui ſera dirigée perpendiculairement vers le plan qui termine le ſegment, qui paſſera par le centre de gravité du ſolide compris entre la ſurface pouſſée par toutes les forces & le plan duquel on a pris toutes les diſtances à cette ſurface, & qui ſera repréſentée par ce ſolide.

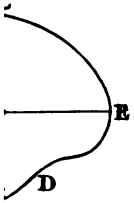

157
D
A
C
Q
159
M
P
N
H
G
E
C
K
B
f
b
e
A
c
F
161
I
A
L
E
C
Q
B
D
O
F
P
R
162
163

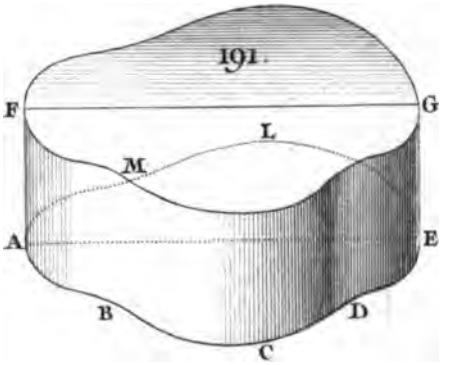

M
C
Q
D
A
K
B
E
C
P
165
F
G
R
Q
168
A
B
P
C
M
F
S
O
N
G
R
Q
N
L
O
167
M
A
B
L
C
169.
F
M
O
N
Q
S
P
G
R
170.
S
L
M
C
B
P
A
S
M
G
N
Q
Z
F
C
171
G
O
R
R
N
Q
M
172.
N
R
O
C
L
P
C
G
S
I
I
A
Z
F
B
L
R
A
173
Q
B
P

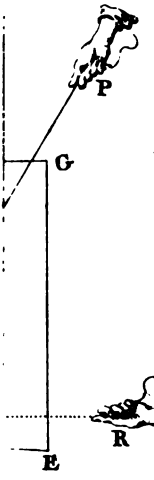

175
O
N
R
Q
176
R
P
O
M
N
177
P
B
A
E
S
Q
F
C
D
H
R
Q
G
B
S
D
R
179
B
A
E
S
P
I
L
K
F
C
D
H
R
Q
G
E
H
A
L
M
D
N
Z
181
F
G
K
E
H
B
L
A
C
N
M
D
Z

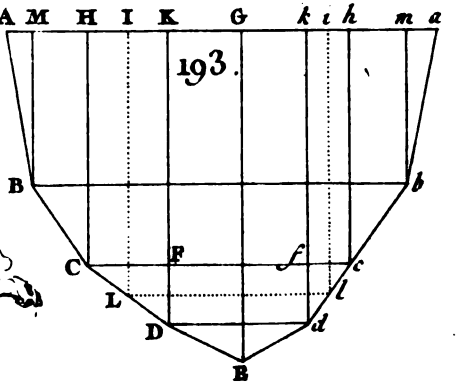

182
183
185
187
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
V
X
Z

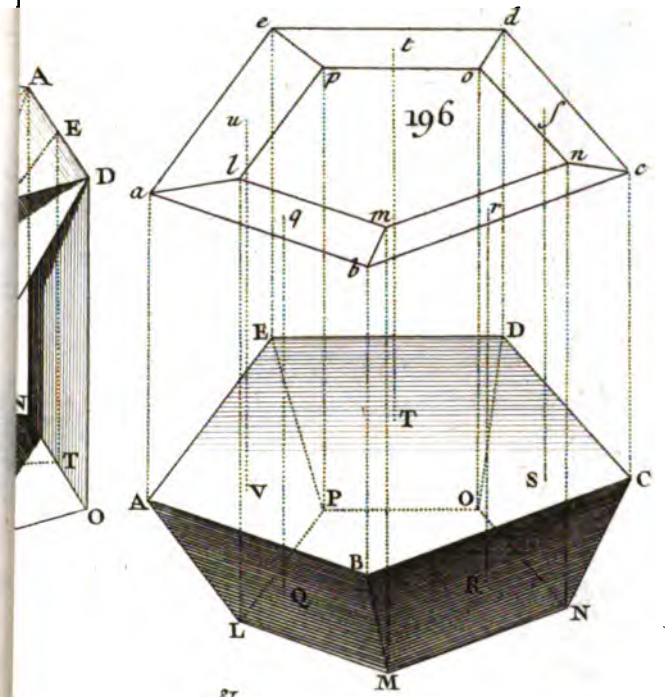

V
X
T
S
S
R
P
Q
R
189
m
l
M
L
o
n
a
c
A
E
f
b
d
k
B
c
g
h
i
e
E
k
d
L
i

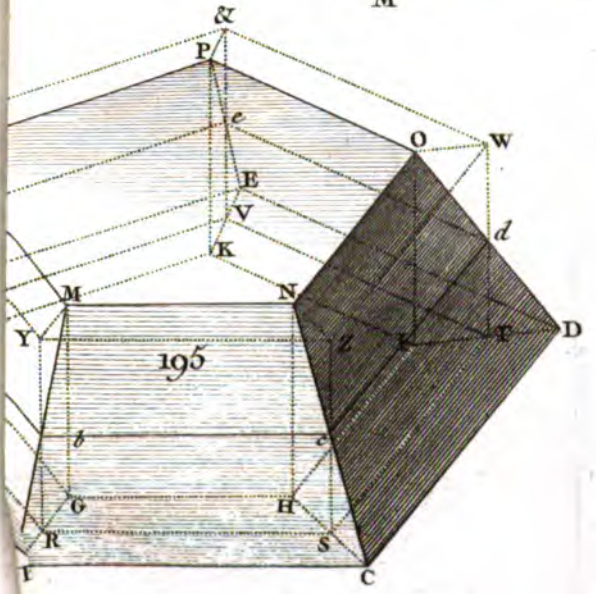

E
D


191.
F
G
L
M
A
E
B
D
C


P
G
R
E


A M H I K G k i h m a
193.
B
b
C
F
f
c
L
l
D
d
B


196
A
E
D
T
O
e
d
t
p
o
u
l
a
q
m
r
b
n
c
E
D
T
A
V
P
O
S
C
B
Q
R
L
N
M


&
P
e
O
W
E
V
K
d
M
N
Y
195
Z
X
F
D
b
c
G
H
R
S
I
C

CHAPITRE II.

De la compoſition & décompoſition des Forces dont les directions ſont ſituées dans différens plans, & ne peuvent pas être réduites à un même plan.

PROBLEME.

276. *Réduire à deux forces trois puiſſances* P, Q, R *appliquées à un corps* ABC, *& dont les directions ſont dans différens plans.* Fig. 197, 198 & 199.

SOLUTION.

Ce Problème peut avoir une infinité de ſolutions différentes : on en va expliquer quelques-unes pour ſervir d'exemples.

I.

Ayant mené ſuivant la direction *AP* de l'une des puiſſances données, un plan quelconque *YZ* auquel les directions des deux autres puiſſances *Q*, *R* ne ſoient point parallèles, afin que les directions de ces deux dernières puiſſances rencontrent ce plan en deux points *B*, *C* : on mènera auſſi ſuivant les directions *BD*, *CE* des puiſſances *Q*, *R*, deux plans *BGDF*, *CIEH* qui couperont le premier plan ſuivant deux droites *BG*, *CI*. Quoique les ſituations de ces deux plans par rapport au plan *YZ* ſoient arbitraires, il ſera preſque toûjours plus commode de mener ces plans perpendiculairement au plan *YZ*, & nous les ſuppoſerons tels dans cette première ſolution. Fig. 197.

Les choſes étant ainſi diſpoſées, & les deux puiſſances Q, R étant repréſentées par des parties BD, CE de leurs directions, qui leur ſoient proportionnelles; on décompoſera la puiſſance Q en deux autres forces BG, BF perpendiculaires l'une à l'autre, dont l'une BG ſera dirigée ſuivant la ſection commune des deux plans GF, YZ, & l'autre BF ſera perpendiculaire au plan YZ. On décompoſera pareillement la puiſſance R en deux forces CI, CH auſſi perpendiculaires l'une à l'autre, dont l'une CI ſera dirigée ſuivant la ſection commune des deux plans IH, YZ, & l'autre CH perpendiculairement au plan YZ.

Les deux puiſſances Q, R étant ainſi décompoſées en quatre forces repréſentées, tant pour leurs quantités que pour leurs directions, par quatre droites BG, BF, CI, CH, dont deux BF, CH ſont perpendiculaires au plan YZ & par conſéquent parallèles entr'elles, & dont les deux autres BG, CI ſont dans le même plan YZ; il eſt évident qu'on pourra les réduire à deux forces ſeulement, comme on va l'expliquer.

On mènera dans le plan YZ une droite BC, & l'ayant diviſée en L de manière que l'on ait $BL:CL::CH:BF$ ou $BC:CL::BF+CH:BF$, on élèvera par le point L une droite LK perpendiculaire au plan YZ, & égale à la ſomme des deux lignes BF, CH; & cette droite LK repréſentera la quantité de force & la direction de la réſultante des deux forces repréſentées par BF, CH.

Les deux autres forces, repréſentées par BG, CI étant dirigées dans le plan YZ, il eſt facile d'en trouver la réſultante par les règles qu'on a données dans le Chapitre précédent. Pour cela, ayant prolongé les

directions *BG*, *CI* de ces deux forces, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en quelque point *M*, ce qu'elles feront toûjours à moins qu'elles ne ſoient parallèles; on prendra ſur ces lignes, à commencer du point *M*, deux parties *M&*, *MS* égales aux deux lignes *BG*, *CI*; puis ayant tiré *ST*, *& T* parallèlement à *M&*, *MS*, on aura un parallélogramme *MST&* dont la diagonale *MT* repréſentera la quantité de force & la direction de la réſultante des deux forces exprimées par *BG*, *CI*.

Comme la diagonale ou la réſultante *MT* des deux forces *M&*, *MS* eſt dans le même plan que ces deux forces compoſantes, & par conſéquent dans le plan *YZ*, & que la direction de la puiſſance *P* eſt *(conſtr.)* dans le même plan; on pourra, par les règles expliquées dans le Chapitre précédent, réduire à une ſeule force la puiſſance *P* & la réſultante *MT* des deux forces *BG*, *CI* ou *M&*, *MS*. Pour faire cette réduction, on prolongera les deux lignes *MT*, *AP*, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en quelque point *V*, ce qu'elles feront toûjours à moins qu'elles ne ſoient parallèles; & l'on prendra ſur ces deux lignes, à commencer du point *V*, deux parties *VN*, *VO*, la première *VN* égale à la proportionnelle qui doit repréſenter la puiſſance *P*, & la ſeconde *VO* égale à *MT*; puis ayant mené par les points *N*, *O*, des droites *NX*, *OX* parallèles à *VT*, *VP*, on aura un parallélogramme *VNXO* dont la diagonale *VX* repréſentera la réſultante de la puiſſance *P* & de la force repréſentée par *VO* ou par *MT*: & comme la force repréſentée par *MT* eſt la réſultante des deux forces repréſentées par *BG* & par *CI*, la diagonale *VX* repréſentera la réſultante de la puiſſance *P*,

& des deux forces repréſentées par *BG* & par *CI*.

On a donc réduit les trois puiſſances *P, Q, R* qui ſont dans différens plans, à deux forces repréſentées par les deux droites *LK, VX*, dont l'une *LK* eſt perpendiculaire au plan *YZ*, & l'autre *VX* eſt dans ce plan. *C. Q. F. T.*

Si les directions des deux forces repréſentées par BG, CI *euſſent été parallèles, on auroit trouvé leur réſultante* MT (n.° 248), *comme on a trouvé celle* LK *des deux forces parallèles repréſentées par* BF, CH: *& ſi la direction de la puiſſance* P *& celle de la réſultante* MT *des deux forces* BG, CI *ſe fuſſent trouvées parallèles, on auroit pareillement déterminé leur réſultante comme il a été expliqué* (n.° 248).

I I.

Fig. 198. On mènera, comme dans la première ſolution, ſuivant la direction de la puiſſance *P* un plan quelconque *YZ* qui ne ſoit parallèle à la direction d'aucune des deux puiſſances *Q, R*, afin que les directions de ces deux puiſſances le puiſſent rencontrer en deux points *B, C*. Puis ayant tiré la droite *BC* qui ſera dans le plan *YZ*, on prolongera la direction de la puiſſance *P* juſqu'à ce qu'elle rencontre cette droite en quelque point *A;* & l'on repréſentera les trois puiſſances *P, Q, R* données de grandeur & de direction, par des parties *AD, BE, CF* de leurs directions, en faiſant ces parties proportionnelles à ces puiſſances.

Enſuite conſidérant que la puiſſance *P* repréſentée par *AD* peut être regardée comme la réſultante de deux forces qui lui ſont parallèles, on la décompoſera en deux forces parallèles repréſentées par *BG, CI* qui ſeront dans le plan *YZ* auſſi-bien que leur

réſultante P repréſentée par AD. Pour cela, on fera $BC : CA : BA :: AD : BG : CI$; alors au lieu des trois puiſſances P, Q, R repréſentées par AD, BE, CF, on aura quatre forces repréſentées par BE, BG, CF, CI.

Les deux forces repréſentées par BE, BG ayant des directions qui ſe rencontrent en un point B, pourront être réduites à une ſeule force, en menant par les extrémités E, G de leurs proportionnelles des parallèles EH, GH à leurs directions; puiſqu'on aura un parallélogramme $BEHG$ dont la diagonale BH repréſentera *(n.° 228)* la force réſultante de celles qui ſont repréſentées par BE, BG.

Les deux forces repréſentées par CF, CI ayant des directions qui ſe rencontrent en un point C, ſeront réduites à une réſultante repréſentée par la diagonale CK d'un parallélogramme $CIKF$ qui aura pour côtés contigus les deux droites CF, CI.

Les trois puiſſances P, Q, R exprimées par les trois lignes AD, BE, CF, & dont on a fait d'abord quatre forces repréſentées par BG, BE, CI, CF, ſeront donc réduites à deux forces ſeulement repréſentées par les deux lignes BH, CK. *C. Q. F. T.*

III.

On mènera, comme dans les deux ſolutions précédentes, ſuivant la direction de la puiſſance P un plan quelconque YZ qui ſoit rencontré en deux points B, C par les directions des deux autres puiſſances Q, R. Puis par les deux points B, C, & par un point quelconque A de la direction de la puiſſance P, on mènera deux droites BAM, CAN; & l'on repréſentera les trois puiſſances P, Q, R données de grandeur Fig. 199.

& de direction, par des parties AD, BE, CF de leurs directions, en faiſant ces parties proportionnelles à ces puiſſances.

Sur la droite AD comme diagonale on fera un parallélogramme $AMDN$, en menant par le point D des parallèles DN, DM aux deux droites BAM, CAN; & au lieu de la puiſſance P repréſentée par la diagonale AD du parallélogramme $AMDN$, on prendra deux autres forces repréſentées par les côtés contigus AM, AN de ce parallélogramme : & faiſant enſuite $BG = AM$, $CI = AN$, au lieu des trois puiſſances P, Q, R repréſentées par AD, BE, CF, on aura quatre forces repréſentées par les quatre droites BG, BE, CI, CF qui concourront deux à deux aux deux points B, C.

Enfin ſur BG, BE, comme côtés contigus, ayant fait un parallélogramme $BGHE$, & ayant conſtruit pareillement ſur CI, CF comme côtés contigus un ſecond parallélogramme $CIKF$; on mènera les deux diagonales BH, CK qui repréſenteront les réſultantes des quatre forces exprimées par BG, BE, CI, CF, ou des trois puiſſances propoſées P, Q, R.

Les trois puiſſances P, Q, R dirigées dans trois plans différens ſeront donc réduites à deux forces ſeulement repréſentées par BH, CK. C. Q. F. T.

Quoique les deux dernières ſolutions paroiſſent plus ſimples que la première, elles le ſont cependant moins; parce qu'elles ne donnent point les ſituations des deux forces réſultantes BH, CK *par rapport au plan* YZ, *& qu'il y auroit beaucoup d'opérations à faire pour déterminer ces deux directions : au lieu que la première ſolution réduit toûjours les trois puiſſances données* P, Q, R

à deux réſultantes, dont l'une eſt dans le plan YZ, *& l'autre perpendiculaire au même plan.*

COROLLAIRE I.

277. Donc ſi l'on a plus de trois puiſſances dont les directions ſoient dans différens plans, on pourra toûjours les réduire à deux forces ſeulement. Pour cela, on réduira d'abord les trois premières puiſſances à deux forces; enſuite ces deux forces & la quatrième puiſſance ſeront encore réduites à deux autres forces ſeulement; ces deux nouvelles forces avec la cinquième puiſſance ſeront pareillement réduites à deux forces réſultantes: & continuant de réduire ainſi les puiſſances données juſqu'à la dernière, on parviendra à n'en faire que deux forces réſultantes qui feront le même effet que toutes les puiſſances données enſemble.

On pourra même, ſi on le juge à propos, réduire toutes les puiſſances données à deux réſultantes, dont l'une ſera dans un plan mené par la direction de la puiſſance qu'on voudra, & l'autre perpendiculaire au même plan. Car ſuivant la première ſolution, les trois premières puiſſances ſeront réduites à deux réſultantes dont l'une ſera dans le plan de l'une de ces puiſſances, & l'autre perpendiculaire à ce plan. Ces deux réſultantes & une troiſième puiſſance étant conſidérées comme trois nouvelles puiſſances, & l'une d'elles étant dans le plan qu'on a mené par une des trois premières, pourront auſſi ſe réduire à deux nouvelles réſultantes dont l'une ſera dans le même plan, & l'autre perpendiculaire à ce plan. Il en ſera de même des autres puiſſances qui, avec les deux réſultantes précédemment trouvées, ſeront ſucceſſivement réduites à deux réſultantes ſeulement.

COROLLAIRE II.

278. Si les deux réſultantes auxquelles ſeront réduites toutes les puiſſances dirigées dans différens plans, ont des directions qui concourent en un même point, ou ſi dans les deux dernières ſolutions ces deux réſultantes ont des directions parallèles, on pourra toûjours les réduire à une ſeule force réſultante par quelqu'une des méthodes qu'on a expliquées dans le Chapitre précédent. Ainſi toutes les puiſſances propoſées, quoique dirigées dans différens plans, ſe réduiront à une ſeule force réſultante; & il ne faudra qu'une ſeule force égale & directement oppoſée à cette réſultante pour les contrebalancer toutes.

Mais ſi les directions des deux forces réſultantes de toutes les puiſſances propoſées ne concourent pas dans un même point ou ne ſont point parallèles, ces deux réſultantes ou les forces dont elles ſont compoſées ne pourront pas être réduites à une ſeule réſultante; & pour les arrêter il faudra employer au moins deux forces égales & directement oppoſées à ces réſultantes.

COROLLAIRE III.

279. Si toutes les puiſſances dirigées dans différens plans ſont en équilibre, il faudra néceſſairement que les deux forces réſultantes auxquelles on les réduira ſe détruiſent mutuellement : ainſi ces deux réſultantes ſeront égales & directement oppoſées.

Fin du Tome premier de la Méchanique Statique.

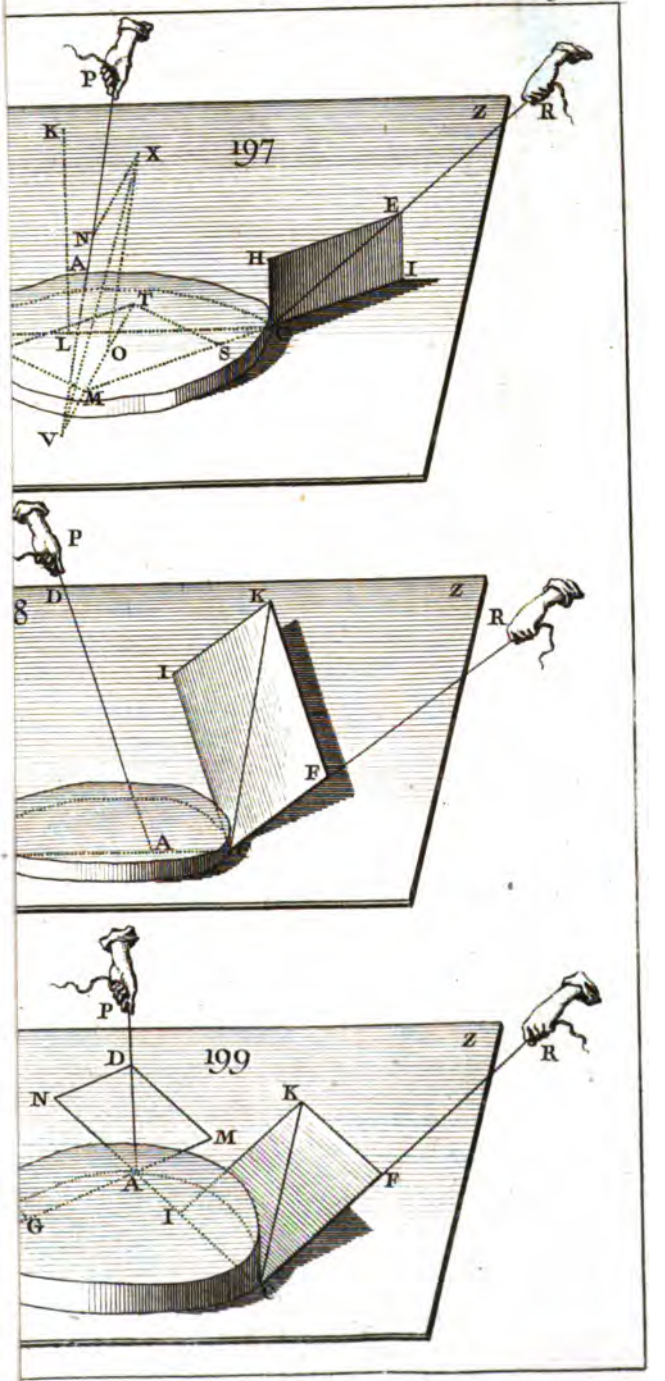

P
K
X
197
Z
R
E
N
A
H
I
T
L
O
S
M
V
P
D
K
Z
R
I
F
A
P
199
D
Z
R
N
K
M
A
F
G
I

TABLE.

NOTIONS PRELIMINAIRES.

DE l'objet de la Méchanique Statique . Page ix
De la manière de repréſenter les Forces . . . . xiij
Des principes de la Méchanique Statique xv
Demandes . . . . . Ibid.
Axiomes . . . . . xvij

LIVRE PREMIER.

Des Centres de Gravité.

CHAPITRE I. Principes généraux ſur les Centres de Gravité . . . . . Page 1
Définition *de la peſanteur* . . . . . Ibid.
COROLLAIRE. *On ne change rien à la peſanteur d'un corps en changeant ſa figure ou ſa ſituation* 3
Définition *des poids, de la ligne verticale, du centre de gravité, des axes d'équilibre, des ſyſtèmes de corps & de leurs centres de gravité* 4
COROLLAIRE I. *Le centre de gravité d'un corps, le point par lequel ce corps eſt attaché à un fil, & le point fixe d'où pend ce fil, ſont tous trois dans une même ligne verticale* 7
COROLLAIRE II. *Lorſque pluſieurs corps ſont enfilés par*

un cordon attaché à leurs centres de gravité, le point de ſuſpenſion du cordon, les centres de gravité de tous les corps, & toutes les parties du cordon, ſont dans une même ligne verticale 9

COROLLAIRE III. *Si les centres de gravité particuliers de pluſieurs corps ſont en ligne droite, le centre général du ſyſtème de tous ces corps ſera dans la même ligne droite* 11

COROLLAIRE IV. *Les centres de gravité de deux corps enfilés & ſoûtenus par un cordon, ne ſont pas dans une même ligne verticale, lorſque le cordon ne traverſe pas le corps ſupérieur ſuivant un diamètre d'équilibre* . . . 12

COROLLAIRE V. *Lorſqu'on ſuſpend ſucceſſivement un corps par deux points différens au moyen d'un fil, les deux directions verticales du fil ſe croiſent au centre de gravité de ce corps* 13

COROLLAIRE VI. *Deux fils attachés à deux points différens d'une droite peſante ſeront avec cette droite qu'ils ſuſpendent dans un même plan vertical* . . . . . Ibid.

COROLLAIRE VII. *Lorſqu'une droite chargée du poids d'un corps eſt ſoûtenue par le moyen de deux cordons, le centre de gravité de ce corps & les deux cordons ſont dans un même plan vertical* 14

Avertiſſement *ſur les différentes façons dont on conçoit qu'une figure peut être compoſée* 15

CHAPITRE II. Des Centres de Gravité des figures ſymmétriques & de quelques autres figures. 18

Première Propoſition fondamentale.

THEOREME. *Le centre de gravité du ſyſtème de deux corps également peſans eſt dans le milieu de la droite qui joint les centres de gravité particuliers de ces deux corps* . . . . . Ibid.

COROLLAIRE I. *Deux corps égaux ayant leurs centres de gravité aux extrémités d'une droite, ſi l'on applique encore à diſtances égales du milieu de la même droite deux nouveaux corps*

corps égaux, & toûjours ainſi de ſuite, le centre de gravité de tous ces corps ſera au milieu de cette droite . . 19

COROLLAIRE II. *Toute figure dont les élémens ont leurs centres de gravité particuliers dans une ligne droite, a ſon centre de gravité au milieu de la même ligne, lorſque ces élémens pris deux à deux à diſtances égales du milieu de cette ligne ſont égaux 20*

THEOREME. *La ligne droite, le parallélogramme, le cercle, l'ellipſe, & toutes les figures planes ſymmétriques fermées, le parallélépipède, le cylindre, la ſphère, l'ellipſoïde, & tous les ſolides de révolution engendrés par des moitiés de figures ſymmétriques fermées, ont leurs centres de gravité dans les milieux de leurs figures, &c . .* Ibid.

THEOREME. *Le centre de gravité du contour d'un parallélogramme & du circuit d'un polygone régulier dont le nombre des côtés eſt pair, eſt au milieu de la droite qui diviſe deux côtés oppoſés en deux parties égales . . 23*

COROLLAIRE. *Le centre de gravité de la circonférence d'un cercle ou d'une ellipſe eſt à ſon centre 24*

THEOREME. *Les ſuperficies des parallélépipèdes & des cylindres, en y comprenant ou n'y comprenant pas les deux baſes oppoſées, & celles de la ſphère & de l'ellipſoïde, ont leurs centres de gravité dans les milieux de leurs figures . . . . . .* Ibid.

THEOREME. *Le centre de gravité de la ſurface convexe d'un ſegment de ſphère eſt au milieu de la flèche de ce ſegment; & celui d'une zone de ſphère compriſe entre des plans parallèles, eſt au milieu de la droite qui joint les centres de ſes baſes oppoſées 26*

THEOREME. *Le centre de gravité d'un triangle eſt le point d'interſection de deux lignes menées de deux angles aux milieux de leurs côtés oppoſés 27*

COROLLAIRES I & II. *Différentes manières de déterminer le centre de gravité d'un triangle 28*

COROLLAIRE III. *Toute figure dont les élémens ont leurs*

centres de gravité en ligne droite & ſont proportionnels aux abſciſſes de cette ligne, a ſon centre de gravité aux deux tiers de la même ligne, &c. 29

PROBLEME. *Trouver le centre de gravité de l'aire & du contour d'un polygone régulier dont le nombre des côtés eſt impair* . . . . . Ibid.

COROLLAIRES I & II. *Le centre de gravité de l'aire & de la circonférence d'un cercle eſt au milieu de ſon diamètre, & celui de l'aire & du contour d'un polygone régulier eſt au centre d'un cercle inſcrit ou circonſcrit à ce polygone.* 30 & 31

PROBLEME. *Trouver le centre de gravité d'un plan rectiligne quadrilatère* 31

Remarques *pour abréger l'opération du Problème* . . 32

PROBLEME. *Trouver le centre de gravité d'un pentagone ou d'un exagone rectiligne quelconque* . . . 33

Et de tous les plans rectilignes & des priſmes dont les baſes ſont des plans rectilignes 34

THEOREME. *Le centre de gravité d'une pyramide eſt dans la droite tirée de ſon ſommet au centre de gravité de ſa baſe* 35

COROLLAIRES I & II. *Pour trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire* . . . . . 35 & 36

COROLLAIRE III. *Pour trouver celui d'une pyramide quelconque* 37

COROLLAIRE IV. *Pour trouver celui d'un cone* . . 38

COROLLAIRE V. *Pour trouver celui d'une figure dont les élémens ont leurs centres de gravité en ligne droite, & ſont proportionnels aux quarrés des diſtances de leurs centres de gravité au premier élément* . . . . . Ibid.

CHAPITRE III. Des Systèmes de Corps, & des Figures dont on trouve les centres de gravité par le moyen des centres de gravité des parties qui les composent 39

Deuxième Proposition fondamentale.

THEOREME. *Lorsque deux poids attachés aux extrémités d'une droite inflexible considérée sans pesanteur & suspendue par un fil, restent immobiles, ces poids sont entr'eux en raison réciproque des parties de la droite comprises entre le fil & leurs directions* . . . . . Ibid.

COROLLAIRE I. *Réciproque du Théorème* 42

COROLLAIRES II & III. *Sur le rapport qu'il y a entre la somme de deux poids en équilibre & chacun de ces poids* 43

COROLLAIRE IV. *Pour trouver le centre de gravité du système de deux corps* 44

COROL. V. *Différentes conséquences tirées du Théorème & des Corollaires précédens* . . . . . Ibid.

PROBLEME. *Etant donnés les poids de tant de corps qu'on voudra, avec les situations de leurs centres particuliers de gravité, trouver le centre de gravité du système de tous ces corps, soit que leurs centres particuliers de gravité se trouvent ou ne se trouvent pas dans un même plan.* . 45

COROLLAIRE. *Pour trouver le centre de gravité d'un plan rectiligne quelconque* 47

Remarque 48

CHAPITRE IV. Des Figures dont on trouve les centres de gravité en considérant leurs momens. 49

Définition *du moment d'un corps & de celui d'un système composé de plusieurs corps, des centres & des axes des momens, des momens convergens & des momens opposés.* Ibid.

COROLLAIRE. *Les momens de deux corps sont égaux quand ils sont considérés relativement au centre de gravité*

de leur ſyſtème, ou relativement à un axe qui paſſe par ce centre de gravité 51

THEOREME *où l'on démontre qu'en conſidérant les momens par rapport au même axe, le moment du centre de gravité du ſyſtème de deux corps eſt égal à la ſomme des momens de ces deux corps, lorſqu'ils ſont de même ſens, ou égal à la différence de ces momens lorſqu'ils ſont contraires* 52

COROLLAIRE *où l'on démontre la même propoſition, dans le cas où les momens ſont conſidérés par rapport à un même point* 54

THEOREME *où l'on démontre que ſi l'on conſidère les momens de tant de corps qu'on voudra, & celui de leur ſyſtème par rapport à un même axe, le moment du centre de gravité de leur ſyſtème ſera égal à la ſomme de leurs momens particuliers, dans le cas où tous les corps ſeront d'un même côté de l'axe; & dans le cas où les corps ſeront diſtribués des deux côtés de l'axe, ce moment ſera égal à la différence qu'il y aura entre la ſomme des momens des corps placés d'un côté, & celle des momens des corps placés de l'autre côté du même axe* 55

COROLLAIRE I, *où l'on démontre la même propoſition, dans le cas où l'axe des momens paſſe par le centre de gravité de quelques corps* 58

COROLLAIRE II, *où l'on démontre encore la même propoſition, dans le cas où tous les corps ont leurs centres de gravité en ligne droite, & que l'on conſidère les momens par rapport à un même point de cette ligne* 60

COROLLAIRE III. *Pour trouver la diſtance du centre de gravité d'un ſyſtème à l'axe ou au centre des momens.* 62

COROLLAIRE IV. *Pour trouver la diſtance du centre de gravité d'une figure à une ligne que l'on conſidère comme l'axe des momens* 63

PROBLEME. *Trouver le centre de gravité d'un ſyſtème compoſé de tant de corps qu'on voudra, dont les centres de gravité particuliers ſont ſitués dans un même plan* . . . 64

COROLLAIRE. *Pour trouver par le Problème précédent le centre de gravité d'un plan rectiligne quelconque* . . 65

Exemples . . . . . Ibid.

Remarque *pour les cas où les centres de gravité de tous les corps d'un ſyſtème ne ſeroient pas dans un même plan.* 69

CHAPITRE V. Des momens & des centres de gravité des arcs & de différentes portions de cercles, & de ceux des parties de la ſurface & de la ſolidité de la ſphère 71

THEOREME. *Soit un demi-cercle touché par une droite parallèle à ſon diamètre & terminée par deux perpendiculaires aux extrémités de ce diamètre, en ſorte que la tangente ſoit égale au diamètre. Si l'on diviſe la demi-circonférence & la tangente en parties correſpondantes par des droites perpendiculaires au diamètre, & que l'on conſidère les momens par rapport à ce diamètre; le moment de la demi-circonférence & ceux de ſes parties ſeront égaux aux momens de la tangente & à ceux de ſes parties correſpondantes* 72

COROLLAIRES I, II & III. *Pour trouver la diſtance du centre de gravité d'un arc à différens diamètres* . . 75, 77 & 78

Remarque *au ſujet des momens & des centres de gravité des arcs plus grands que la demi-circonférence* . . . 79

PROBLEME. *Trouver le centre de gravité d'un arc dont on connoît le rayon & le nombre de degrés* . . 84

I. *Pour une demi-circonférence* 85

II. *Pour un quart de circonférence* . . . . . Ibid.

III. *Pour un arc de 60 degrés* 86

THEOREME. *Le centre de gravité d'un ſecteur de cercle eſt placé dans le rayon qui diviſe ce ſecteur en deux parties égales, de manière que la diſtance du centre du cercle au centre de gravité de ce ſecteur, eſt égale aux deux tiers du produit fait de ſa corde & de ſon rayon, diviſé par la longueur de ſon arc, &c.* 88

COROLLAIRE I. *Pour trouver la valeur du moment d'un ſecteur de cercle relativement à ſon centre & relativement à ſon rayon latéral* 90

COROLLAIRES II & III. *Pour trouver la diſtance du centre de gravité d'un ſecteur plus grand ou plus petit que le demi-cercle, au centre du cercle & à un rayon latéral du ſecteur* . . . . . 91 & 92

THÉOREME. *La diſtance du centre de gravité d'un ſegment de cercle au centre du cercle, eſt égale à deux fois le tiers du cube de la moitié de la corde de ce ſegment, diviſé par l'aire du même ſegment* 94

COROLLAIRE I. *Pour trouver la diſtance du centre de gravité d'un ſegment plus grand ou plus petit que le demi-cercle, au centre du cercle* 95

COROLLAIRES II & III. *Pour trouver la diſtance du centre de gravité d'un ſegment, au rayon qui paſſe par l'extrémité de ſon arc* . . . . . 95 & 96

COROLLAIRE IV. *Application du Théorème & des Corollaires précédens à un exemple* 97

THÉOREME. *La perpendiculaire menée du centre de gravité d'un demi-ſegment de cercle ſur le côté qui fait partie du diamètre, eſt égale au quarré de cette partie du diamètre, multiplié par la ſomme faite de l'autre partie du diamètre & du rayon, & diviſé par ſix fois l'aire de ce demi-ſegment* 99

COROLLAIRE I. *Pour trouver une autre expreſſion de la même diſtance du centre de gravité d'un demi-ſegment, au côté qui fait partie du rayon* 100

COROLLAIRE II. *Application du Théorème & du Corollaire précédent à un exemple* . . . . . Ibid.

Remarque *pour déterminer la poſition du centre de gravité d'un demi-ſegment* 102

THÉOREME. *Le centre de gravité d'un ſecteur ſphérique eſt éloigné du centre de la ſphère d'une quantité égale aux trois huitièmes de ce qui reſte du diamètre, après en*

avoir retranché la flèche ou la hauteur de la calotte de ce secteur 103

COROLLAIRE I. *Le centre de gravité d'une demi-sphère est éloigné de son centre d'une quantité égale aux trois huitièmes du rayon, & (*COROL. II*) aux neuf seizièmes du rayon, lorsque l'arc de grand cercle qui passe par le sommet de la calotte du secteur sphérique est de 120 degrés* 104

Remarque *pour un secteur sphérique plus grand qu'une demi-sphère* 105

THEOREME. *Le centre de gravité d'un segment sphérique est éloigné du centre de la sphère, d'une quantité égale au quart du quarré de la différence qu'il y a entre le diamètre de la sphère & la flèche de ce segment, divisé par le rayon de la sphère moins le tiers de la flèche du segment.* Ibid.

COROLLAIRES I & II. *Pour les cas où le segment sphérique seroit une demi-sphère, & où l'arc qui est le profil de la calotte du segment seroit de 120 degrés* . . 107 & 108

Remarque *pour un segment sphérique plus grand qu'une demi-sphère* 108

CHAPITRE VI. Des centres de gravité des aires des segmens & secteurs elliptiques . . 109

Définition *de l'ellipse, de ses axes, des cercles correspondans à l'ellipse, des points, des lignes & des parties correspondans du cercle & de l'ellipse* . . . . . Ibid.

THEOREME. *Si de la circonférence de l'ellipse on mène vers le second axe des droites perpendiculaires à ce second axe, ou parallèles au premier, & qu'on décrive un cercle sur le second axe comme diamètre, les ordonnées de l'ellipse seront aux ordonnées correspondantes du cercle, comme le premier axe ou sa moitié est au second axe ou à sa moitié* 113

COROLLAIRE. *Toutes les ordonnées correspondantes du cercle & de l'ellipse sont proportionnelles* 114

THEOREME. *Si par un point quelconque de la circonférence du cercle correſpondant à l'ellipſe, on mène une perpendiculaire au diamètre qui ſert de grand ou de petit axe à l'ellipſe, les parties de cette perpendiculaire compriſes entre l'axe & des points correſpondans du cercle & de l'ellipſe, ou entre des points correſpondans de ces deux courbes, ſeront proportionnelles aux deux axes de l'ellipſe ou à leurs moitiés* 114

COROLLAIRE I. } *L'aire du* {segment / ſecteur} *circulaire eſt à l'aire*
COROLLAIRE II. } *du* {ſegment / ſecteur} *elliptique correſpondant, comme l'axe commun au cercle & à l'ellipſe eſt à l'autre axe de l'ellipſe.* 118 & 120

COROL. III. } *Le moment du* {ſegment / ſecteur} *circulaire conſidéré*
COROL. IV. } *par rapport à l'axe commun au cercle & à l'ellipſe, eſt au moment du* {ſegment / ſecteur} *elliptique correſpondant, comme le quarré de l'axe commun au cercle & à l'ellipſe eſt au quarré de l'autre axe de l'ellipſe* . . . . 121 & 123

COROL. V. } *Le moment d'un* {ſegment / ſecteur} *circulaire conſidéré*
COROL. VI. } *par rapport à une ligne perpendiculaire à l'axe commun au cercle & à l'ellipſe, eſt au moment du* {ſegment / ſecteur} *elliptique correſpondant, comme l'axe commun au cercle & à l'ellipſe eſt à l'autre axe de l'ellipſe* . . . . . 125 & 128

THEOREME. *Les centres de gravité de deux ſegmens ou de deux ſecteurs correſpondans du cercle & de l'ellipſe, ſont dans une même perpendiculaire à l'axe commun au cercle & à l'ellipſe* 130

COROLLAIRE I. *Lorſque deux ſegmens ou deux ſecteurs correſpondans du cercle & de l'ellipſe ont pour flèche commune une même partie de l'axe commun au cercle & à l'ellipſe, ils ont le même centre de gravité* 132

COROL. II. } *Pour trouver le centre de gravité d'un* {ſegment / ſecteur}
COROL. III. }

elliptique diviſé en deux parties égales & ſemblables par l'un des axes de l'ellipſe 133

THEOREME *où l'on démontre la poſition du centre de gravité d'un ſegment ou d'un ſecteur quelconque d'ellipſe, dans une ligne tirée du centre de gravité du ſegment ou ſecteur circulaire correſpondant perpendiculairement ſur l'axe commun au cercle & à l'ellipſe* 134

COROLLAIRE. *Pour trouver le centre de gravité d'un ſegment ou d'un ſecteur quelconque d'ellipſe* 136

CHAPITRE VII. Des centres de gravité des ſegmens & ſecteurs de ſphéroïdes elliptiques. 137

LEMME. *Lorſque des droites parallèles entr'elles ſont rencontrées par des plans qui concourent en une même droite, elles ſont coupées par ces plans en parties proportionnelles entr'elles & à leurs totalités* . . . . . Ibid.

COROLLAIRE. *Réciproque du Lemme* 138

Remarque. *Si des lignes parallèles forment la circonférence d'un cercle par leurs rencontres avec quelqu'un des plans qui concourent en une même droite, elles formeront par leurs rencontres avec les autres plans des circonférences d'ellipſes dont une peut être un cercle dans certains cas* . . Ibid.

Définition *du ſphéroïde elliptique, de la ſphère correſpondante à ce ſphéroïde, de leurs ordonnées correſpondantes, de leurs points correſpondans & de leur équateur commun* . . 141

COROLLAIRE I. *Si l'on coupe la ſphère & l'ellipſoïde correſpondant par un plan mené ſuivant l'axe perpendiculaire à l'équateur commun, la ſection de la ſphère & celle de l'ellipſoïde ſeront un cercle & une ellipſe correſpondans* 142

COROLLAIRE II. *Chaque ordonnée de la ſphère eſt à chaque ordonnée correſpondante de l'ellipſoïde, comme l'axe ou le diamètre de l'équateur commun à ces deux ſolides eſt à l'autre axe de l'ellipſoïde* 143

COROLLAIRE III. *Le ſolide de la ſphère eſt au ſolide de*

l'ellipſoïde correſpondant, comme l'axe ou le diamètre de l'équateur commun à ces deux ſolides eſt à l'autre axe de l'ellipſoïde 144

COROLLAIRE IV. *Si l'on coupe un ſphéroïde aplati ou alongé par un plan quelconque, la ſection ſera une ellipſe, &c.* 145

COROL. V. COROL. VI. *Le ſolide d'un {segment / ſecteur} ſphérique eſt au ſolide du {segment / ſecteur} correſpondant d'ellipſoïde, comme l'axe de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde eſt à l'autre axe de l'ellipſoïde* . . . . . 146 & 147

COROLLAIRE VII. *Le moment d'un ſegment ou d'un ſecteur ſphérique conſidéré par rapport à un plan perpendiculaire ſur l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde, eſt au moment du ſegment ou du ſecteur d'ellipſoïde relativement au même plan, comme l'axe ou le diamètre de l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde eſt à l'autre axe de l'ellipſoïde* 148

COROLLAIRE VIII. *Le moment du ſegment ou du ſecteur ſphérique conſidéré par rapport à l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde, eſt au moment du ſegment ou du ſecteur correſpondant d'ellipſoïde relativement au même plan, comme le quarré de l'axe ou du diamètre de l'équateur commun eſt au quarré de l'autre axe de l'ellipſoïde* . . 149

Remarque *où l'on fait voir que ſi l'on coupe la ſphère & l'ellipſoïde correſpondant par un plan perpendiculaire à l'équateur commun, les ſections ſeront un cercle & une ellipſe correſpondans* 151

THEOREME. *Les centres de gravité de deux {ſegmens / ſecteurs} correſpondans de ſphère & d'ellipſoïde ſont dans une même droite perpendiculaire à l'équateur commun à la ſphère & à l'ellipſoïde* 152

COROLLAIRE. *Pour avoir une ligne droite qui contienne le centre de gravité d'un ſegment ou d'un ſecteur quelconque d'ellipſoïde* 154

THEOREME *où l'on démontre la poſition du centre de*

gravité d'un {segment / secteur} *d'ellipsoïde, dans une ligne menée par le centre de gravité du* {segment / secteur} *sphérique correspondant perpendiculairement sur l'équateur commun à la sphère & à l'ellipsoïde* 154

COROLLAIRE I. *Le* {segment / secteur} *d'ellipsoïde aura le même centre de gravité que le* {segment / secteur} *sphérique, lorsque le centre de gravité de ce dernier sera dans l'équateur commun à la sphère & à l'ellipsoïde* 156

COROLLAIRE II. *Lorsque les bords de deux* {segmens / secteurs} *correspondans de la sphère & de l'ellipsoïde sont dans un même plan perpendiculaire sur l'équateur commun, ces* {segmens / secteurs} *correspondans ont même centre de gravité* 157

COROLLAIRE III. *Lorsque les bords de deux* {segmens / secteurs} *correspondans de la sphère & de l'ellipsoïde sont dans des plans parallèles à l'équateur commun, ces* {segmens / secteurs} *ont leurs centres de gravité dans l'axe perpendiculaire au même équateur &c.* 158

COROLLAIRE IV. *Pour trouver le centre de gravité du* {segment / secteur} *d'ellipsoïde engendré par la révolution d'un* {demi-segment / secteur} *d'ellipse sur l'un de ses axes* . . . . Ibid.

CHAPITRE VIII. Du centre de gravité de la parabole & du paraboloïde 161

Définition *de la parabole, de son paramètre &c.* . . Ibid.

COROLLAIRE I. *Le quarré de l'ordonnée d'un point quelconque de la parabole est égal au produit de son abscisse & du paramètre, & l'abscisse d'un point quelconque est égale au quarré de son ordonnée divisé par le paramètre* 162

COROL. II. *Les quarrés des ordonnées de la parabole sont proportionnels aux abscisses de ces ordonnées* . . . Ibid.

THEOREME. *Si par le sommet de la parabole on mène une perpendiculaire à l'axe, & que par deux points quelconques de la parabole infiniment près l'un de l'autre,*

on tire deux ordonnées perpendiculaires à l'axe & deux autres droites perpendiculaires à la première, c'eſt-à-dire, parallèles à l'axe; le petit eſpace compris entre les deux perpendiculaires à l'axe, ſera double du petit eſpace correſpondant compris entre les deux parallèles à l'axe. 162

COROLLAIRE. *Un eſpace compris entre l'arc de parabole, l'ordonnée & l'abſciſſe, eſt double de l'eſpace extérieur correſpondant* 163

Remarque *ſur les ſegmens & demi-ſegmens obliques de parabole* 164

THEOREME. 1.° *Les momens de deux eſpaces intérieur & extérieur paraboliques correſpondans ſont égaux, lorſqu'on les conſidère par rapport à l'axe ou au diamètre de la parabole.* 2.° *Lorſqu'on les conſidère relativement à la droite menée par le ſommet de la parabole, le moment de l'eſpace intérieur eſt quadruple du moment de l'eſpace extérieur* 165

THEOREME *où l'on démontre la poſition du centre de gravité d'un demi-ſegment parabolique, & de celui de l'eſpace extérieur correſpondant &c.* 167

COROLLAIRES I & II. *Pour trouver les centres de gravité de deux eſpaces paraboliques intérieur & extérieur correſpondans* . . . . . 169 & 170

THEOREME. *Le centre de gravité d'un ſphéroïde parabolique produit par la révolution d'un demi-ſegment parabolique compris entre un arc de parabole, ſon axe & ſon ordonnée, eſt ſitué dans l'axe, de manière que la partie compriſe entre ce centre de gravité & le ſommet eſt égale aux deux tiers de l'axe du paraboloïde* 170

Remarque *pour trouver le centre de gravité d'un ſegment oblique de ſphéroïde parabolique* 171

CHAPITRE IX. Des mouvemens des centres de gravité 173

THEOREME. } *Lorſque les centres de gravité particuliers*
COROLLAIRE I. }

de {*deux corps* / *tant de corps qu'on voudra*} *ſe meuvent uniformément ſuivant des lignes droites, ſi le centre de gravité de leur ſyſtème ſe meut, il décrit uniformément une ligne droite . . .* 173 *&* 176

COROLLAIRE II. *Si les droites parcourues par les centres de gravité de deux mobiles, ſont dans un même plan, la droite que décrira le centre de gravité du ſyſtème de ces deux mobiles ſera auſſi dans le même plan . . . .* 178

COROL. III. } *Si les droites décrites par les centres de*
COROL. IV. }
gravité de {*deux mobiles* / *tant de corps qu'on voudra*} *ſont parallèles, la droite décrite par le centre de gravité du ſyſtème leur ſera parallèle . . . . . .* 178 & 179

COROLLAIRE V. *Si les centres de gravité particuliers de tant de corps qu'on voudra, décrivent uniformément & en même temps les côtés homologues d'autant de figures ſemblables dont les côtés correſpondans ſoient parallèles chacun à chacun, le centre de gravité du ſyſtème décrira auſſi uniformément & dans le même temps le contour d'un autre polygone ſemblable dont les côtés ſeront parallèles aux côtés homologues des premiers . . . . . .* 180

COROLLAIRE VI, *où l'on démontre la même conſéquence que dans le précédent, lorſque les centres particuliers décrivent des courbes ſemblables &c. . . . . .* 182

Remarque. *Si le centre du ſyſtème de pluſieurs corps & celui d'un nouveau corps ou d'un nouveau ſyſtème, décrivent uniformément en ſens contraires & en même temps deux droites parallèles réciproquement proportionnelles aux poids de ces ſyſtèmes, le centre du ſyſtème général reſtera immobile.* 183

THÉOREME. *Lorſque les centres de gravité particuliers d'un nombre quelconque de corps, ſe meuvent uniformément ſuivant des lignes droites parallèles entr'elles, & que le centre de gravité de leur ſyſtème général ſe meut par conſéquent auſſi uniformément ſuivant une ligne parallèle à celle que décrit le centre de gravité particulier de chaque corps : 1.° Si tous les mobiles vont d'un même côté, le produit fait de la ſomme de tous ces mobiles multipliée par*

la droite que décrit le centre de gravité de leur ſyſtême général, eſt égal à la ſomme des produits particuliers faits de chaque corps & de la ligne droite que décrit ſon centre de gravité particulier. 2.° Si tous les mobiles ne vont pas d'un même côté, le produit fait de la ſomme de tous ces corps multipliée par la droite que décrit le centre de gravité de leur ſyſtême général, eſt égal à la différence qu'il y a entre la ſomme des produits particuliers faits de chacun des corps qui vont d'un même côté, multiplié par la ligne que décrit le centre de gravité de ce corps, & la ſomme des produits faits de chacun des corps qui vont du côté oppoſé, multiplié par le chemin que parcourt le centre de gravité de ce corps 186

COROL. I & II, *où l'on démontre la même propoſition, lorſque les centres de gravité particuliers des mobiles décrivent des polygones ou des courbes ſemblables.* 190 & 192

COROLLAIRE III, *où l'on démontre les mêmes vérités, en regardant les lignes & les ſuperficies mobiles comme des poids* 193

Des portées moyennes des terres dans les déblais & les remblais 194

CHAPITRE X. Des ſuperficies & des ſolides qui doivent leur génération à des mouvemens de lignes & de plans, & de l'uſage qu'on peut faire du mouvement du centre de gravité d'une figure pour trouver l'étendue de la ſuperficie ou du ſolide qu'elle engendre 199

THÉOREME. *L'étendue ſuperficielle ou ſolide engendrée par une ligne ou par un plan mobile continuellement perpendiculaire aux chemins ſemblables & parallèles parcourus vers un même côté par tous ſes points, eſt égale au produit de la multiplication de cette ligne ou de ce plan par le chemin que décrit ſon centre de gravité* 202

COROLLAIRE I. *Application de ce Théorème à la recherche de l'aire du parallélogramme & de la ſolidité du priſme.* 204

COROLLAIRE II. *Application du même Théorème à la recherche de l'aire d'un triangle & de la solidité d'une pyramide* 205

COROLLAIRE III. *Application du même Théorème à la recherche de la superficie d'un cercle & d'un cone droit, d'une couronne de cercle & d'une zone de cone droit tronqué parallèlement à sa base &c.* 208

COROLLAIRE IV. *Application du même Théorème à la recherche de la solidité d'un cone droit* 209

COROLLAIRE V. *Application du même Théorème à la recherche de la solidité d'un tronc de cone* 210

COROLLAIRE VI. *Application du même Théorème à la recherche de la superficie & de la solidité d'un anneau, &c.* 212

COROLLAIRE VII. *Application du même Théorème à la recherche de la superficie & de la solidité d'un tore, &c.* 213

COROLLAIRE VIII. *Application du même Théorème à la recherche de la superficie d'une gorge & du solide qui peut la remplir* 215

COROLLAIRE IX. *Application du même Théorème à la recherche de la superficie engendrée par la révolution d'une doucine ou d'un talon* 216

CHAPITRE XI. Du toisé des dômes, des voûtes en arc de cloître, & des voûtes d'arrête. . 217

DES DÔMES 218

PROBLEME. *Trouver la superficie d'un dôme surbaissé engendré par la révolution de la moitié d'une anse de panier autour de sa montée* 219

COROLLAIRE I. *Pour trouver la superficie d'un dôme, lorsque l'on connoît le demi-diamètre de sa base & les rayons des arcs qui composent sa courbe génératrice* 222

COROLLAIRE II. *Pour trouver la superficie d'un dôme, lorsque l'on connoît le rayon de sa base & sa montée.* Ibid.

Exemple 223

Remarque I. *Pour trouver la ſuperficie d'un dôme ſurbaiſſé, lorſqu'il eſt un demi-ſphéroïde elliptique engendré par la révolution d'un quart d'ellipſe autour de la moitié de ſon petit axe* . . . . . Ibid.

Exemple 225

Remarque II. *Méthode de pratique pour trouver la ſuperficie d'un dôme ſurbaiſſé, lorſque ſa montée n'eſt pas moindre que la moitié du rayon de ſa baſe; avec des exemples, & la comparaiſon de cette méthode à celles du Problème & de la Remarque I* 226

PROBLEME. *Trouver la ſuperficie d'un dôme ſurmonté engendré par la révolution de la moitié d'une anſe de panier autour de ſon demi-diamètre* 229

COROLLAIRE I. *Pour trouver la ſuperficie d'un dôme ſurmonté, lorſque l'on connoît ſa montée & les rayons des arcs qui compoſent ſa courbe génératrice* 231

COROLLAIRE II. *Pour trouver la ſuperficie d'un dôme ſurmonté, connoiſſant ſa hauteur & le demi-diamètre de ſa baſe* 232

Exemple 233

Remarque I. *Pour trouver la ſuperficie d'un dôme ſurmonté, lorſqu'il eſt un demi-ſphéroïde elliptique engendré par la révolution d'un quart d'ellipſe autour de la moitié de ſon grand axe* . . . . . Ibid.

Exemple 235

Remarque II. *Méthode de pratique pour toiſer un dôme ſurmonté engendré par la révolution de la moitié d'une anſe de panier ou d'un quart d'ellipſe, lorſque ſa montée ne ſurpaſſe pas le diamètre de ſa baſe* 236

DES VOUSTES EN ARC DE CLOISTRE. 238

Pour un pan en plein cintre de voûte en arc de cloître. 241

PROBLEME. *Trouver la ſurface d'un pan ſurbaiſſé ou ſurmonté de voûte en arc de cloître* 244

Pour

Pour un pan ſurbaiſſé, lorſque la courbe génératrice eſt une moitié d'anſe de panier 246
Exemple . . . . . Ibid.
Pour un pan ſurmonté, lorſque la courbe génératrice eſt une moitié d'anſe de panier 247
Exemple . . . . . Ibid.
Pour un pan ſurbaiſſé, lorſque la courbe génératrice eſt un quart d'ellipſe 248
Exemple . . . . . Ibid.
Pour un pan ſurmonté, lorſque la courbe génératrice eſt un quart d'ellipſe 249
Exemple 250
COROLLAIRE. *Pour les voûtes en arc de cloître conſtruites ſur des plans réguliers ou irréguliers* . . . . . Ibid.
Remarque *où l'on donne des méthodes de pratique pour toiſer un pan* {*ſurbaiſſé* / *ſurmonté*} *de voûte en arc de cloître* . . . 251
DES VOUSTES D'ARRESTE . . . 252
Pour trouver la ſuperficie d'une lunette en plein cintre de voûte d'arrête 255
Pour trouver la ſuperficie d'une lunette ſurbaiſſée de voûte d'arrête 257
Exemple 259
Remarque. *Méthode de pratique pour toiſer la ſuperficie d'une lunette ſurbaiſſée de voûte d'arrête* 260
Pour trouver la ſuperficie d'une lunette ſurmontée de voûte d'arrête 261
Exemple 262
Remarque. *Méthode de pratique pour toiſer la ſuperficie d'une lunette ſurmontée de voûte d'arrête* 263
DE LA SOLIDITÉ DES VOUSTES 264
De la ſolidité des voûtes en berceau . . . . . Ibid.
De la ſolidité des dômes & des voûtes en arc de cloître. 266
De la ſolidité des voûtes d'arrête 271

LIVRE II.

DE LA COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES 273

CHAPITRE I. De la compoſition & décompoſition des Forces dont les directions ſont dans un même plan ou peuvent être réduites à un même plan. 275

Définition *des forces réſultantes, des forces compoſantes, & des directions réſultantes* . . . . . Ibid.

THÉOREME. *Lorſque deux puiſſances dirigées dans un même plan & dont les directions concourent en quelque point, ſont appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible droite ou courbe, ſoûtenue en équilibre au moyen d'un appui, la droite tirée de leur point de concours à l'appui, eſt la direction de la force réſultante de ces deux puiſſances.* 277

Remarque. *La direction de cette réſultante doit être dans le même plan que celle des deux puiſſances* 278

THÉOREME. *Lorſque deux puiſſances appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible, & dirigées dans un même plan, ſont en équilibre ſur un appui qui s'oppoſe au mouvement de cette ligne; ſi du point d'appui l'on mène des perpendiculaires aux directions des deux puiſſances, ces perpendiculaires ſeront en raiſon réciproque des forces de ces deux puiſſances* . . . . . Ibid.

COROLLAIRE. *Réciproque du Théorème* 279

THÉOREME. *Lorſque deux puiſſances appliquées aux extrémités d'une ligne inflexible, & dirigées dans un même plan, ſont en équilibre ſur un appui; ſi l'on mène par cet appui des droites parallèles aux directions des puiſſances, ces deux puiſſances ſeront en même rapport que les côtés du parallélogramme, pris ſur leurs directions* 280

COROLLAIRE I. *Réciproque du Théorème* 281

COROLLAIRE II. *Deux puiſſances en équilibre ſont proportionnelles aux côtés d'un parallélogramme, pris ſur leurs*

directions, & ſont repréſentées par ces côtés, lorſque la diagonale ou ſon prolongement paſſe par l'appui. Et réciproquement, &c. 281

THÉOREME. *Lorſque deux puiſſances ſont repréſentées par les côtés d'un parallélogramme, leur force réſultante eſt dirigée ſuivant la diagonale de ce parallélogramme. Et réciproquement, &c.* 282

THÉOREME. *Lorſque deux puiſſances ſont repréſentées, tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions, par les côtés contigus d'un parallélogramme rectangle, la réſultante de ces deux puiſſances eſt repréſentée par la diagonale du même parallélogramme* 283

COROLLAIRE. *A la place d'une puiſſance quelconque repréſentée par une partie de ſa direction, l'on pourra prendre deux autres puiſſances repréſentées tant pour leurs grandeurs que pour leurs directions, par les côtés contigus d'un parallélogramme rectangle dont cette partie ſera la diagonale* 287

THÉOREME. *Lorſque deux puiſſances ſont repréſentées par les côtés contigus d'un parallélogramme quelconque rectangle ou non rectangle, leur réſultante eſt toûjours repréſentée, tant pour ſa direction que pour ſa grandeur, par la diagonale du même parallélogramme* . . . . . Ibid.

COROLLAIRE I. *A la place de deux puiſſances repréſentées par les côtés contigus d'un parallélogramme, on pourra prendre une ſeule force repréſentée par la diagonale du même parallélogramme* 289

COROLLAIRE II. *Réciproque du précédent* 290

COROLLAIRE III, *où l'on détermine pour combien de force & de quelle manière chacune des deux puiſſances contribue à la compoſition de la réſultante* 291

COROL. IV. } *Si l'on fait un triangle dont les côtés*
COROL. V. }
ſoient {*parallèles* / *perpendiculaires*} *aux directions de deux puiſſances & de leur réſultante, ces trois forces ſeront proportionnelles à ces côtés* 292

THÉOREME. *Si par le point où concourent les direc-*

tions de deux puiſſances & celle de leur réſultante, on décrit une circonférence qui rencontre les directions de ces puiſſances en trois points, & qu'on joigne ces trois points par trois cordes; la valeur de chacune de ces trois forces, & non ſa direction, ſera repréſentée par la corde qui ſe terminera aux directions des deux autres 293

COROLLAIRE I. *Deux quelconques de ces trois forces ſont en raiſon réciproque des lignes également inclinées ſur leurs directions, & qui partent d'un même point de la direction de la troiſième 294*

COROLLAIRE II. *Deux quelconques de ces trois forces ſont en raiſon réciproque des perpendiculaires tirées ſur leurs directions, & qui partent d'un même point de la direction de la troiſième 295*

THÉOREME. *Lorſque les directions de deux puiſſances & de leur réſultante concourent en un même point & ſont par conſéquent dans un même plan, ſi l'on tire une droite qui rencontre les directions de ces trois forces en trois points quelconques, la valeur de chacune de ces trois forces ſera repréſentée par la portion de cette droite compriſe entre les directions des deux autres, multipliée par la partie de ſa propre direction compriſe entre la même droite & le point de concours 297*

COROLLAIRE I. *Lorſque les directions de ces trois forces concourent à une diſtance infinie, ou ſont parallèles & coupées par une ligne droite, la quantité de chacune de ces forces eſt repréſentée par la partie de cette droite compriſe entre les directions des deux autres 299*

COROLLAIRE II. *La réſultante de deux puiſſances dont les directions ſont parallèles, eſt égale à leur ſomme ou à leur différence, ſuivant qu'elles tirent ou ne tirent pas d'un même côté . . . . . Ibid.*

THÉOREME. *Deux puiſſances & leur réſultante ſont trois forces dont chacune peut être repréſentée par le ſinus de l'angle que les directions des deux autres font entr'elles. 300*

COROLLAIRE. *Ces trois forces ſont proportionnelles aux ſinus des angles au travers deſquels paſſent leurs directions. Ibid.*

SCHOLIE. *Différens moyens pour trouver la valeur & la direction de la réſultante de deux puiſſances, lorſque l'on connoîtra les valeurs de ces deux puiſſances & leurs directions ſituées dans un même plan* 301

PROBLEME. *Trouver la réſultante de tant de puiſſances qu'on voudra qui tirent ou pouſſent toutes le même point avec des quantités de force connues, ſuivant des directions données quelconques ſituées ou non ſituées dans un même plan.* 307

COROLLAIRE. *Pour trouver la réſultante de pluſieurs puiſſances ſans faire aucun parallélogramme* 309

Définition *des centres des forces & des centres principaux d'équilibre* 312

COROLLAIRE. *Chaque réſultante eſt à la diſtance qu'il y a entre le centre des forces & le centre d'équilibre par lequel elle paſſe, comme le nombre des forces dont elle eſt la réſultante eſt à l'unité* . . . . . Ibid.

LEMME. *Si des quatre angles d'un parallélogramme on mène quatre paralleles vers un même plan qui ne rencontre point le parallélogramme, la ſomme des deux parallèles tirées par deux angles oppoſés ſera égale à la ſomme des deux parallèles tirées par les deux autres angles oppoſés* 313

COROLLAIRES I & II. . . . . 314 & 315

THE'OREME. *Tant de puiſſances qu'on voudra & leur force réſultante étant appliquées à un même point, & repréſentées par des parties proportionnelles de leurs directions priſes depuis le point de concours; ſi l'on tire par ce point une ligne droite quelconque, & que par les extrémités des proportionnelles des puiſſances, on mène des perpendiculaires à cette droite, pour avoir ſur elle, à commencer du point de concours, des parties correſpondantes aux proportionnelles de ces puiſſances & de leur réſultante, la partie correſpondante à la réſultante ſera égale à la différence qu'il y aura entre la ſomme des autres parties qui ſeront d'un côté du point de concours, & la ſomme des parties qui ſeront de l'autre côté du même point.* 316

COROLLAIRE 318

THE'OREME. *Lorſque pluſieurs puiſſances repréſentées par des parties de leurs directions tirent ou pouſſent un*

même point, & que par les extrémités de leurs proportionnelles on mène des perpendiculaires à leur réſultante; la réſultante eſt égale à la différence qu'il y a entre la ſomme des parties qui ſont de ſon côté, & la partie ou la ſomme des parties qui ſont du côté oppoſé 318

THEOREME. *Lorſque pluſieurs puiſſances dirigées dans un même plan, toutes vers le dedans ou toutes vers le dehors d'un polygone, ſont perpendiculaires & proportionnelles aux côtés de ſuite de ce polygone, leur réſultante qui eſt auſſi dirigée dans le même plan, eſt perpendiculaire & proportionnelle à la droite qui termine les côtés extrêmes de ce polygone* 321

COROLLAIRE I. *Si les mêmes puiſſances ſont perpendiculaires ſur les milieux des côtés de ſuite du même polygone, leur réſultante ſera auſſi perpendiculaire ſur le milieu de la droite qui terminera les côtés extrêmes proportionnels aux puiſſances* 322

COROLLAIRE II. *Pour le cas où toutes ces puiſſances ſont en équilibre* 324

COROLLAIRES III, IV & V. *Pour des puiſſances proportionnelles & appliquées perpendiculairement aux faces d'un priſme* . . . . . de 324 à 326

COROLLAIRE VI. *Pour des puiſſances proportionnelles & appliquées perpendiculairement à toutes les parties d'une courbe ou d'une ſurface courbe formée par le mouvement d'une ligne courbe le long d'une directrice* 326

THEOREME & COROL. I & II, *ſervant de Lemmes à la Méchanique des corps flottans dont il ſera queſtion dans l'Hydroſtatique* . . . . . de 328 à 331

THEOREME & COROL. I, II, III, IV, V & VI, *pour ſervir auſſi de Lemmes à la Méchanique des corps flottans* . . . . . 332 & ſuiv.

CHAPITRE II. De la compoſition & décompoſition des forces dont les directions ſont ſituées dans différens plans, & ne peuvent pas être réduites à un même plan 343,

PROBLEME. *Réduire à deux forces trois puiſſances dont les directions ſont dans différens plans* 343

COROLLAIRE I, *où l'on fait voir qu'on peut toûjours réduire à deux forces ſeulement tant de puiſſances qu'on voudra, dirigées dans différens plans* 349

COROLLAIRE II, *où l'on fait voir qu'il ne faudra qu'une ou deux forces pour contrebalancer toutes ces puiſſances, ſuivant que leurs réſultantes ſeront ou ne ſeront pas dans un même plan* 350

COROLLAIRE III. *Si toutes les puiſſances ſont en équilibre, les deux forces auxquelles on les réduira, ſeront égales & directement oppoſées* . . . . . Ibid.

Fin de la Table.

Fautes à corriger.

Page 38, ligne 10 : SP liſez SPF

Page 64, lig. 16 : ſitués dans un même plan *liſez* dont les centres de gravité particuliers ſont ſitués dans un même plan

Page 82, lig. 29 : de l'extrémité *liſez* des extrémités

Page 84, lig. 13 : qui lui ſert de moment *liſez* qui ſert de moment à cet arc

Page 94, lig. 1 : $\frac{\overline{MN}}{3MON}$ *liſez* $\frac{\overline{MN}^2}{3MON}$

Ibid. lig. 12 : P, V, Q liſez P, Q, V

Page 111, lig. 25 : ou *liſez* &

Page 113, lig. 25 : AC liſez MC

Page 124, en marge, lig. 6 & 7 : Fig. 73, 74, 75 & 76 *liſez* Fig. 73 & 76

Page 127, lig. 23 : AB liſez AS

Ibid. lig. pénultième : AP liſez AS